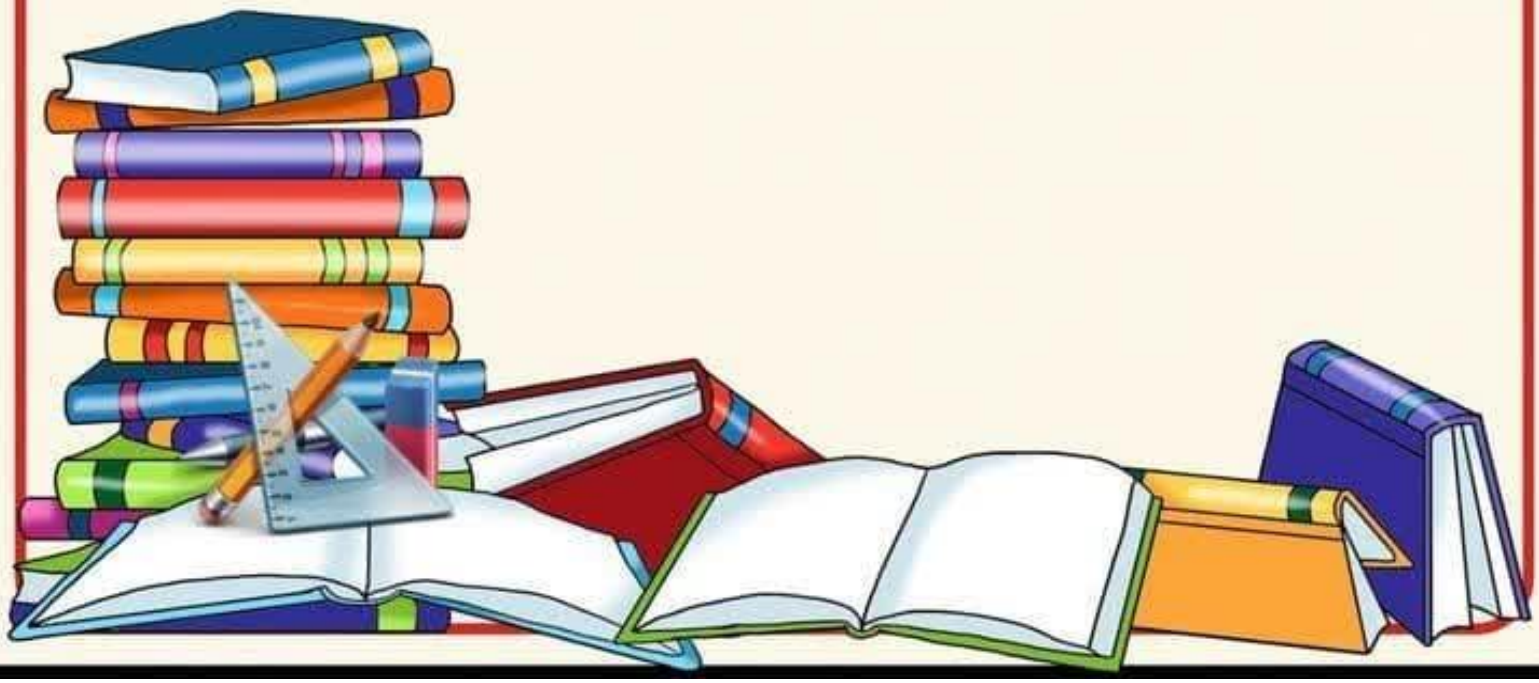
ریاضی و آمار 3

ویژه رشته انسانی

مولف: استاد مقدم

- ریاضیات جامع کنکور انسانی
- درس نامه
- مثال و پاسخ تشریحی



فصل اول ریاضی دوازدهم ← اصل ضرب (شمارش) ← انتخابی به m طریق — به n طریق ← $m \times n$

مثال ← شیراز — اصفهان — تهران

$۳ \times ۴ = ۱۲$

اصل جمع : $m + n$ عمل اول یا دوم.

یا ← + ← اصل جمع

و ← × ← اصل ضرب

مثال: مسافرهای قواهدا از تهران به اراک و سفر کنند به گونه‌ای که حتماً از قم عبور کنند. اگر از تهران تا قم ۳ راه و از قم تا اراک ۴ راه وجود داشته باشد:

الف) مسافر چند طریق از تهران به اراک مسافرت می‌کند.

$۳ \times ۴ = ۱۲$

ب) مسافر به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام می‌دهد.

$۱۲ + ۱۲ = ۲۴$ ← اصل +

$۱۲ \times ۲ = ۲۴$ ← اصل × (رفت و برگشت)

ج) مسافر به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام می‌دهد به گونه‌ای که مسیرها رفت و برگشت یکسان نباشد.

رفت ⇐ $۳ \times ۴ = ۱۲$

اراک — قم — تهران

برگشت ⇐ $۳ \times ۲ = ۶$

$۱۲ + ۶ = ۱۸$

فاکتوریل : ! ← حاصلضرب هر عدد از خودش تا ۱

$۲! = ۲ \times ۱ = ۲$

$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$

$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

$۶! = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$

$۱! = ۱$

$۰! = ۱$

نکته ⇐ اعداد منفی ! ندارند

مثال: حاصل را بدست آورید؟

$\frac{۳!}{۵!} = \frac{\cancel{۳!}}{۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}} = \frac{۱}{۲۰}$

$\frac{۴!}{۳!} = \frac{۴ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۴$

$\frac{۵!}{۳!}$ (۱) $\frac{۵ \times ۴ \times \cancel{۳} \times \cancel{۲} \times \cancel{۱}}{\cancel{۳} \times \cancel{۲} \times \cancel{۱}} = ۲۰$ (۲) $\frac{۱۲۰}{۶} = ۲۰$ (۳) $\frac{۵ \times ۴ \times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۲۰$

(۵! عدد)

★ $\frac{\overset{۲۴}{(۴!)}}{(۳!)} + \frac{\overset{۲}{(۲!)}}{(۰!)} = ۴ + ۲ = ۶$

★ $(۳! + ۴!) \times ۲! = ۶۰$

★ $۵! \times ۲! = ۱۲۰ \times ۲ = ۲۴۰$

★ $۳! \times ۲! = ۶ \times ۲ = ۱۲$

★ $۲! + ۳! = ۲ + ۶ = ۸$

★ $۴! - ۲! = ۲۴ - ۲ = ۲۲$

★ $(۳!)^۲ = ۳۶$

$n! = n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \dots \times ۱$

$(n+۱)! = (n+۱) \times n \times n-۱ \times n-۲ \times \dots \times ۱$

$(n-۱)! = (n-۱) \times (n-۲) \times \dots \times ۱$

$\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n \times \cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}} = n$

$\frac{(n+۱)!}{n!} = \frac{(n+۱) \times \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+۱$

$\overset{۱۲۰}{(۵!)} + \overset{۲}{(۲!)} \neq ۷!$

$۵! \times ۲! \neq ۱۰!$

$(۵!)^۲ \neq ۲۵!$

$۵! - ۲! \neq ۳!$

! در ع عمل اصلی تأثیر ندارد

تست ← حاصل $\frac{(3!)!}{5!}$ کدام است؟

$\frac{1}{20}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{5}$ ۶

$\frac{6!}{5!} = \frac{6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6$

حاصل عبارت $\frac{20!}{18!} + \frac{8!}{4!}$ کدام است؟

$\frac{20\times 19\times \cancel{18!}}{\cancel{18!}} + \frac{8\times 7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 380 + 1680 = 2060$

۲۰۶۰ ۲۰۲۰ ۱۶۹۴ ۱۶۸۲

تست ← اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد حاصل $(n+2)!$ کدام است.

$n=2$

$\frac{\cancel{(n-1)!}}{(n+1)\times n\times \cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{6}$

3×2

ضرب ۲ عدد متوالی

۲۴ ۶

۷۲۰ ۱۲۰

تست ← در عبارت $\frac{(n-1)!}{2!} = \frac{n!}{3!}$ مقدار n کدام است.

$\frac{\cancel{(n-1)!}}{1\times \cancel{2!}} = \frac{n\times \cancel{(n-1)!}}{3\times \cancel{2!}}$

$\frac{1}{1} = \frac{n}{3} \Rightarrow n=3$

$\frac{3!}{2!} = \frac{3!}{3!}$

۳ ۴ ۵ ۶

کلاس روز سه‌شنبه خرداد ۱۷ مهرماه

جایگشت (جایگاه) ← n شیء متمایز به $n!$ طریق کنار هم قرار می‌گیرند

۲ کتاب ریاضی
۳ کتاب ادبیات

R R A A A

$2!\times 3! = 2\times 2\times 6 = 24$

جایگشت ۲ کتاب ریاضی — جایگشت ۳ کتاب ادبیات

۹

△ ○ □ ← ۱
△ □ ○
□ ○ △
□ △ ○
○ △ □
○ □ △ ← ۶

۲ قفسه ← A
۳ سریال ← S
۲ وزیر ← V

A A S S S V V

$2!\times 3!\times 2!\times 3! = 144$

$2\times 6\times 2\times 6$

تست ← ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب اجتماعی را به چند طریق در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به طوری که کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند؟

$2!\times 3!\times 2! = 2\times 6\times 2 =$

۲۴ ۶۰ ۱۲۰ ۱۲

کتاب علمی

۳ ـ ادامه

الف) یکدرمیان = ۶×۲۴ = ۳!×۴! = E A E A E A E

۱۴۴

ب) علم کنارهم / ادبیات کنارهم

E E E E A A A

۲!×۴!×۳! = ۲×۲۴×۶ = ۲۸۸

ل س ت ا ن

مثال: با حروف کلمه گلستان:

الف) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ ۳×۴×۵×۶ = ۳۶۰

ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ۲×۳×۴×۵×۶ = ۷۲۰

ج) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با ل شروع شود ۱×۳×۴×۵ = ۶۰

د) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با حرف ل شروع شود ۱×۳×۴×۵ = ۶۰

ه) چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که با حرف ت پایان یابد. ۳×۴×۵ = ۱۲۰

جایگشت عدد و رقم:

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵

الف) چند عدد ۳ رقمی: ۶۰ = ۳ (یکان) × ۴ (دهگان) × ۵ (صدگان)

ب) ... ۴ رقمی: ۱۲۰ = ۲×۳×۴×۵

ج) ... ۳ رقمی زوج: ۲۴ = ۲ (۲، ۴) × ۳ × ۴

د) ... ۴ رقمی فرد: ۷۲ = ۳ (۱، ۳، ۵) × ۲ × ۳ × ۴

ه) ... ۴ رقمی زوج: ۴۸ = ۲ (۲، ۴) × ۲ × ۳ × ۴

خ) ... ۳ رقمی مضرب ۵: ۱۲ = ۱ (۵) × ۳ × ۴

گ) ... ۳ رقمی بزرگتر از ۳۰۰: ۳۶ = ۳ (۳، ۴، ۵) × ۳ × ۴

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵

۵ × ۵ × ۴ = ۱۰۰ (۵ ≠ ۰)

۵ × ۵ × ۴ × ۳ = ۳۰۰ (۵ ≠ ۰)

مهم ـ مهم ـ مشکل

۳ × ۴ × ۴ = ۴۸ (۳ = ۱، ۳، ۵)

۵ × ۴ × ۱ = ۲۰ (۱ = یکان) ، ۴ × ۴ × ۲ = ۳۲ (۲ = یکان، ۴ = زوج) ← ۵۲

مهم ـ مهم ـ مشکل

۴ × ۳ × ۲ = ۲۴ (۲ = ۲، ۴)

۵ × ۴ × ۳ × ۱ = ۶۰ ، ۴ × ۴ × ۳ × ۲ = ۹۶ (۲ = ۲، ۴) ← ۱۵۶

۵ × ۴ × ۱ = ۲۰ ، ۴ × ۴ × ۱ = ۱۶ (۱ = ۰، ۵) ← ۳۶

اصل جمع

+ = یا = اصل جمع

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد ، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد ، برای انجام کار مورد نظر m+n روش وجود دارد. توجه کنید که نهایتا قرار است کار فقط با یکی از شیوه ها انجام شود.

در اصل جمع فقط حق انتخاب یکی از راه‌ها را داریم

مثال: امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا ، شیرینی بدهد . او با خود فکر میکند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران ((یا)) آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود ، تنها یکی از 2 نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه ی هویج ، سیب و پرتقال را می توان انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

$2+3=5$

اصل ضرب

و = اصل ضرب شمارش

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش ، مرحله ی دوم را بتوان به n روش انجام داد ، در کل مورد نظر با $m\times n$ روش قابل انجام است. توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد.

مثال: هفته ی بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند ، اما او می خواهد امین را هم به آن رستوران ((و)) هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

$1\times1=1$

مثال: از تهران به اصفهان 2 راه و از اصفهان به شیراز 3 راه وجود دارد.مسافری میخواهد از تهران به شیراز عبور کند به گونه ای که حتما از اصفهان عبور کند.

تهران ← اصفهان ← شیراز

مرحله به مرحله = اصل ×

الف)به چند طریق این مسافرت انجام میشود؟

$2 \times 3 = 6$

ب)به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام میشود؟

$6 + 6 = 12$

$6 \times 2 = 12$

اصل ضرب

رفت و برگشت

ج)به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام میشود به گونه ای که مسیرهای رفت و برگشت یکی باشد؟

مسیر رفت ⇒ $2 \times 3 = 6$ → رفت

مسیر برگشت ⇒ $1 \times 1 = 1$ → برگشت

→ $6 \oplus 1 = 7$

جمع

اگر چند شئ متمایز داشته باشیم ، به هر حالت چیدن آنها کنار هم ، یک جایگشت از آن اشیا می گوییم.

جایگشت: به ترتیب و نحوه قرار گرفتن اشیا کنار هم جایگشت می‌گوییم.

جایگشت n شیء را با n! فرق نمایش می‌دهیم.

مثال: با ارقام 0 و1 و2و3 و 4و 5 بدون تکرار ارقام

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

نکته: اولین و آخرین رقم مشخص شود سپس بره آخرین رقم تمرکز کن

$\underset{\text{صدگان}}{5} \times \underset{\text{دهگان}}{5} \times \underset{\text{یکان}}{4} = 100$

$\neq$

ب)چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

$5 \times 4 \times 1 = 20$

$4 \times 4 \times \underset{2,4,6}{2} = 32 \rightarrow 52$

$\neq 0$

ج)چند عدد سه رقمی مضرب 5 می توان ساخت؟

$5 \times 4 \times 1 = 20$

$4 \times 4 \times 1 = 16 \rightarrow 36$

د) چند عدد سه رقمی فرد می توان ساخت؟

$4 \times 4 \times \underset{1,3,5}{3} = 48$

$\neq 0$

مثال: در یک کشور نوعی اتومبیل در 5 مدل ، 10 رنگ ، 3 حجم موتور مختلف و 2 نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد ، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

مثال: یک آزمون چند گزینه ای شامل 10 سوال 4 گزینه ای و 5 سوال 2 گزینه ای است. فردی قصد دارد به سوال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار انجام دهد اگر:

الف) اگر مجبور باشد به همه ی سوال ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 1$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد ، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از 1 تا n را بصورت $n!$ نمایش می دهیم.(قرار داد $0! = 1$)

حاصل ضرب هر عدد از خودش تا 1

مثال: حاصل عبارت های فاکتوریل دار را بصورت ساده و حاصل ضرب ها زیر را با نماد فاکتوریل بدست آورید.

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$$

مثال: 3کتاب ریاضی متفاوت و 4 کتاب فیزیک متفاوت را به چند حالت می توان چید به طوری که :

الف)هیچ شرطی به میان نباشد.

$3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

۳ کتاب ریاضی / ۴ کتاب فیزیک

R R R _ _ _ _ جابجایی ۳ کتاب ریاضی

ب) کتاب های ریاضی کنار هم باشند ؟

$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$ جابجایی درونی

E E E E _ _ _

ج) کتاب های فیزیک کنارهم باشند؟

$4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$

E E E E R R R

تکرار

د) کتاب های فیزیک کنار هم و کتاب های ریاضی کنار هم باشند؟

$2! \times 4! \times 3! = 2 \times 24 \times 6 = 288$

E R E R E R E

ه)کتاب ها یک در میان باشند ؟

$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

ک) کتاب اول و اخر ریاضی باشد؟

$\underset{\text{ریاضی}}{2} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \underset{\text{ریاضی}}{3} = 720$

گ) کتاب وسط فیزیک باشد؟

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

مثال: 4 کتاب ریاضی متفاوت و 4 کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان یک در میان کنار هم قرار داد؟

E R E R E R E R

$4! \times 4! = 24 \times 24$

576

مثال: با ارقام 0 و 1 و 2 و3 و4 و5 چند عدد سه رقمی می توان ساخت ؟

الف)با تکرار

$5 \times 6 \times 6 = 180$

$\neq 0$

ب)بدون تکرار

$5 \times 5 \times \underset{\text{یکان}}{4} = 100$

ترتیب و ترکیب: ① ترتیب در انتخاب مهم است. ترتیب: P

اعداد و آرایش / حروف، کلمات / مراسم / پیدا کند

② ترتیب در انتخاب مهم نیست. ترکیب: C

انتخاب بهره از کسی / مراسم پیدا کند

کلید واژه: انتخاب

n آیتمی → r آیتمی ، $r \leq n$ ، انتخاب

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترتیب r تایی از n تایی

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

ترکیب r تایی از n تایی

$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$ $\quad P(4,3)$ $\quad P(4,1)$

$C\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3!}} = 10$ $\quad C\binom{4}{3}$ $\quad C\binom{6}{2}$

تست ← از تساوی $P(n, n-2) = 12$ مقدار n کدام است؟

۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶

$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 12$

$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-(n-2))!} = \frac{n!}{(\cancel{n}-\cancel{n}+2)!} = \frac{n!}{2!} = \frac{12}{1} \rightarrow n! = 2! \times 12 = 24 \rightarrow \boxed{n=4}$

$C\binom{4}{1} \rightarrow C\binom{n}{1} = n$ $\quad C\binom{4}{4} \rightarrow C\binom{n}{n} = 1$ $\quad C\binom{4}{3} \Rightarrow C\binom{n}{n-1} = n$ $\quad C\binom{n}{0} = 1$

$C\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{3!}} = 10$

$C\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2 \times 1 \times \cancel{3!}} = 20$

حداقل ← لااقل ← اقلا ← دست کم

حداکثر ← دست زیاد

و ← X

یا ← +

$\frac{\cancel{4} \times 5}{1 \times \cancel{2}} = 10$ $\quad \binom{6}{3} = \frac{4 \times 5 \times \cancel{6}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 20$ $\quad C\binom{7}{4} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{7}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4}} = 15$ $\quad \binom{5}{3} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{4} \times 5}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 10$

تست ۱ ← از ۱۰ کتاب ادبی و ۸ کتاب علوم چند دسته ۵ تایی مستقل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می‌توان انتخاب کرد؟

۱۰ کتاب ادبی → ۲ کتاب

۸ کتاب علوم → ۳ کتاب

$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \frac{9 \times \cancel{10}^{5}}{1 \times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{6} \times \cancel{7} \times 8}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 45 \times 56 =$

۲۴۱۰ ، ۲۴۲۰ ، ۲۵۴۰ ، ۲۵۲۰

$\binom{10}{3} = \frac{8 \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{10}^{5}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 120$

تست ۲ ← روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. چند مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

۶۰ ، ۹۰ ، ۱۲۰ ، ۱۸۰

تست ۳ ← در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره از جعبه خارج کرد؟

$\binom{10}{3} = \frac{\cancel{8}^{4} \times \cancel{9}^{3} \times 10}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} =$

۱۰۰ ، ۱۲۰ ، ۱۸۰ ، ۲۱۰

در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. می‌خواهیم ۳ مهره به تصادف از جعبه خارج کنیم. به چند طریق این کار را انجام دهیم

الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشد: هر ۳ آبی یا هر سه قرمز

$\binom{4}{3}+\binom{5}{3}=14$

$\frac{4\times3}{1\times2}$

ب) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی باشد

$\binom{4}{2}\times\binom{5}{1}=6\times5=30$

ج) حداقل ۲ مهره آبی باشد: ۲ آبی و ۱ قرمز یا ۳ آبی و ۰ قرمز

$\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{5}{3}\times\binom{4}{0}=50$

$10\times4+10\times1$

د) حداکثر ۲ مهره آبی باشد:

۲ آبی و ۱ قرمز یا ۱ آبی و ۲ قرمز یا ۰ آبی و ۳ —

ه) حداقل ۲ مهره قرمز باشد

۲ قرمز و ۱ آبی یا ۳ قرمز و ۰ آبی

$\binom{5}{0}\times\binom{4}{3}+\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}\rightarrow\frac{3\times4}{1\times2}=$

$1\times4+5\times6=34$

۴ مهره قرمز

۵ مهره آبی

$n=9$

$r=3$

$\binom{9}{3}=\frac{7\times\cancel{8}^{4}\times\cancel{9}^{3}}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}=84$

مثال ← در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۴ مهره سبز و ۳ مهره آبی وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. به چند طریق این اتفاق انجام می‌شود که

الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشد ← یا هر ۳ سفید یا هر ۳ سبز یا هر سه آبی

$\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}=1+4+1=6$

$\frac{3\times\cancel{4}^{2}}{1\times\cancel{2}}=6$

ب) هر سه مهره هم‌رنگ نباشد

۱ سفید و ۱ سبز و ۱ آبی

$\binom{3}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}=3\times4\times3=36$

ج) ۲ مهره سبز و ۱ مهره سفید باشد

$\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}=6\times3=18$

۳ مهره سفید

۴ " سبز

۳ " آبی

۳ مهره

$n=10$

$r=3\rightarrow\binom{10}{3}=\frac{\cancel{8}^{4}\times\cancel{9}^{3}\times10}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}=120$

یا: +

و: ×

د) حداقل ۲ مهره آبی باشد.

۲ آبی و ۱ سبز یا ۳ آبی و ۰ سبز و سفید

$\binom{7}{0}\times\binom{3}{3}+\binom{7}{1}\times\binom{3}{2}=1\times1+7\times3=22$

ه) حداکثر ۱ مهره سبز باشد

۱ سبز و ۲ سفید یا ۰ سبز و ۳ آبی و سفید

$\frac{\cancel{5}^{3}\times\cancel{6}}{1\times\cancel{2}}=15$

$\frac{4\times\cancel{5}\times\cancel{6}}{1\times\cancel{2}\times\cancel{3}}$

$\binom{4}{1}\times\binom{6}{2}+\binom{4}{0}\times\binom{6}{3}$

$4\times15+1\times20=60+20=80$

تست ← از میان ۷ کشتی‌گیر و ۵ وزنه‌بردار به چند طریق ۳ نفر انتخاب کنیم به گونه‌ای که حداقل یک نفر کشتی‌گیر باشد؟

۷ کشتی‌گیر

۵ وزنه‌بردار

۳ نفر

۱ نفر کشتی‌گیر و ۲ وزنه‌بردار یا ۲ ک و ۱ وزنه‌بردار یا ۳ ک و ۰ وزنه‌بردار

$\binom{5}{0}\times\binom{7}{3}+\binom{5}{1}\times\binom{7}{2}+\binom{5}{2}\times\binom{7}{1}$

$1\times35+5\times21+10\times7$

$35+105+70=210$

$\binom{7}{2}=\frac{\cancel{6}^{3}\times7}{1\times\cancel{2}}=21$

$\binom{7}{3}=\frac{\cancel{5}\times7}{1\times\cancel{3}}$

۲۱۰

۳۲۰

۱۸۰

۲۰۰

نکته ← 2^n ← تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

$C\binom{n}{m}$ ← تعداد زیرمجموعه‌های m عضوی یک مجموعه n عضوی

مثال: مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. الف) این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟ $2^6=64$

ب) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ $\binom{6}{3}=\frac{4\times5\times6}{1\times2\times3}=20$ ج) مجموعه چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟ $\binom{6}{4}=\frac{3\times5\times6}{1\times2\times3}=15$

د) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی که حتماً شامل b باشند دارد؟ $\underline{b}\ _\ _$ $\binom{5}{2}=10$ خ) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی که حتماً شامل e باشند دارد؟ $e\ _\ _\ _$ $\binom{5}{3}=10$

ذ) چند زیرمجموعه ۳ عضوی که شامل e باشند و b نباشند دارد؟ $b\ e\ _\ _$ $\binom{4}{2}=\frac{3\times4}{1\times2}=6$

ر) مجموعه چند زیرمجموعه ۴ عضوی که شامل e باشند و f نباشند؟ $f\ e\ _\ _$ $\binom{4}{3}=4$

تست ← یک مجموعه ۸ عضوی چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟ ۷۰ (۴۲، ۵۶، ۸۴)

$\binom{8}{4}=\frac{5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4}=70$

احتمال:

تعریف فضای نمونه‌ای: S

تعریف پیشامد تصادفی: A

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ← $n(S)$

تعداد اعضای پیشامد تصادفی ← $n(A)$

احتمال ← $\frac{\text{جزء}}{\text{کل}}=\frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{فضای نمونه‌ای}}=$ احتمال

$P_A=\frac{n(A)}{n(S)}$ $\boxed{A}$

عدد اول ← عددی که دو عضو دارد و بخش‌پذیر است

عدد مرکب ← ~ ~ بیش از دو عضو دارد و بر عددی دیگر بخش‌پذیر است

مثال: در پرتاب یک تاس احتمال آنکه ← عدد رو شده زوج باشد $P_A=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

عدد رو شده بزرگتر از ۴ باشد $P_B=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ~ ~ مربع کامل باشد $P_G=\frac{0}{6}=0$

~ ~ مضرب ۳ باشد $P_C=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ~ ~ اول باشد $P_F=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (۲، ۳، ۵)

مثال: در پرتاب توأم دو تاس احتمال آنکه ← هر دو عدد تاس زوج باشد $P_A=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(۲،۲) (۴،۴) (۶،۶) (۲،۴) (۴،۲) (۲،۶) (۴،۶) (۶،۲) (۶،۴)

هر دو عدد تاس مضرب ۳ باشد $P_B=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(۳،۶) (۶،۳) (۳،۳) (۶،۶)

جمع دو عدد تاس ۸ باشد $P_C=\frac{5}{36}$

(۳،۵) (۵،۳) (۴،۴) (۲،۶) (۶،۲)

هر دو عدد تاس مربع کامل باشد $P_E=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(۱،۱) (۴،۴) (۱،۴) (۴،۱)

هر دو عدد تاس بزرگتر از ۵ باشد $P_F=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(۵،۶) (۶،۵) (۶،۶)

مثال ← در لیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. به تصادف ۳ مهره از لیسه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه

الف) هر سه مهره هم‌رنگ باشد: یا هر ۳ قرمز یا هر ۳ آبی $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=10+4=14$

$P_A=\frac{14}{84}=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}$

۵ قرمز

۴ آبی

۳ تا

$r=3$

$n=9$

$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{7\times8\times9}{1\times2\times3}=84$

ب) حداقل ۱ مهره آبی باشد

۱ آبی و ۲ قرمز یا ۲ آبی و ۱ قرمز یا ۳ آبی و ۰ قرمز $\binom{5}{0}\times\binom{4}{3}+\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}+\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}$

$1\times4+5\times6+10\times4=74$

$P_B=\frac{74}{84}$

ج) اصلاً ۲ مهره قرمز باشد ۲ قرمز و ۱ آبی یا ۳ قرمز و ۰ آبی $\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}+\binom{5}{3}\times\binom{4}{0}$

$1\times10+4\times10=50$

$P_C=\frac{50}{84}$

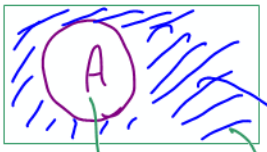
در کیسه‌ای ۷ مهره سیاه و ۴ مهره سفید وجود دارد. ۲ مهره به تصادف از کیسه انتخاب می‌کنیم. احتمال هر رنگ بودن ۲ مهره کدام است؟

$\frac{27}{55}$ ✓ $\quad \frac{21}{55} \quad \frac{6}{55} \quad \frac{13}{55}$

۷ تا سیاه، ۴ تا سفید → ۲ تا

$$P_A = \frac{\binom{7}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{27}{55}$$

$\binom{7}{2} = \frac{7\times6}{1\times2} = 21$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{11}{2} = \frac{11\times10}{1\times2} = 55$



A' متمم A

احتمال اینکه A اتفاق بیفتد

عدم وقوع اتفاق

احتمال اینکه A اتفاق نیفتد

وقوع اتفاق

$$P_A + P_{A'} = 1 \rightarrow \boxed{P_{A'} = 1 - P_A}$$

مثال: تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آمدن اعداد تاس یکسان نباشد؟

۲ تاس ۳۶ حالت

۶ تا حالت مساوی اند

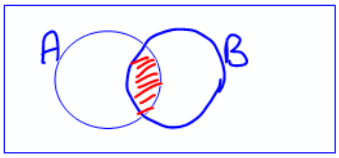
۱۵ حالت اول > دوم

۱۵ حالت دوم > اول

احتمال یکسان نباشد $= 1 -$ احتمال یکسان باشد

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{1\times6} - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$



$A\cap B \neq \emptyset$

اشتراک دارند

سازگارند

احتمال	حرف بعد از عدد	
$\cup$	+	یا
$\cap$	×	و

$$P(A\cup B) = P_A + P_B - P(A\cap B)$$

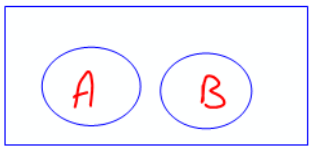
احتمال رخ دادن A یا B

لااقل اتفاق یکی از آن‌ها رخ دهد

احتمال رخ دادن A

احتمال رخ دادن B

احتمال رخ دادن A و B همزمان



$A\cap B = \emptyset$

اشتراک ندارند

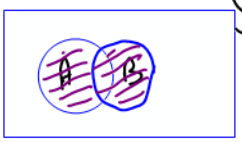
ناسازگار

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

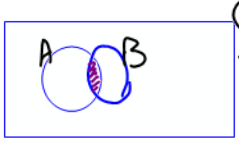
احتمال رخ دادن A یا B

احتمال رخ دادن A

احتمال رخ دادن B



$A\cup B = \{x \mid x\in S,\ x\in A$ یا $x\in B\}$



$A\cap B = \{x \mid x\in S,\ x\in A$ و $x\in B\}$

$A - B = \{x \mid x\in S,\ x\in A,\ x\notin B\}$

$B - A = \{x \mid x\in S,\ x\in B,\ x\notin A\}$

تست ۱ ← اگر $P(A\cup B) = \frac{3}{4}$ و $P_B = \frac{17}{40}$ و $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$ باشد P_A کدام است؟

$\frac{9}{20}$ $\quad \frac{11}{20} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5}$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\frac{3}{4} = x + \frac{17}{40} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{17}{40} + \frac{1}{8} = x \rightarrow \frac{30-17+5}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

تست ۲ ← احتمال آمدن دو برابر ۲ تاس، اعداد رو شده برابر یا مجموع آن‌ها ۱۱ باشد کدام است؟

$\frac{3}{10}$ $\quad \frac{2}{9}$ $\quad \frac{4}{11} \quad \frac{5}{12}$

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} + \frac{6}{36}$$

(۵،۶)(۶،۵)

خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. احتمال آنکه:

الف) هر سه فرزند در روز جمعه به دنیا آمده باشند: $\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}$

ب) هر سه فرزند در یک روز هفته به دنیا آمده باشند: $\frac{7}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}$

ج) هر سه فرزند در روزهای مختلف به دنیا آمده باشند: $\frac{7}{7}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{7}$

روز تولد

ترتیب و ترکیب

ترتیب:

تعداد جایگشت های rتایی از nشی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های rشی از بین n سی متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد ، با $p(n,r)$ نمایش میدهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود.

$$p(n,\ r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با حروف کلمه ((جهانگردی)) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت ؟ چندتا از انها به ((ی)) ختم می شوند؟

۱ × ۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۶ × ۷ × ۱

ی

ب) چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت که در انها حروف ((د)) و ((ی)) کنارهم قرار داشته باشند؟

د ی ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓

۲! × ۷!

پ) چند کلمه 6 حرفی می توان نوشت ؟ چندتا از آنها به ((گردی)) ختم می شود؟

ل ر د ی ✓ ✓

۳! × ۱!

ت)چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ((جهان)) چهار حرف اول باشند؟

ج ه ا ن ✓ ✓ ✓ ✓

۵! × ۱!

مثال: با حروف کلمه ((گل پیرا)) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ی 6 حرفی می توان نوشت؟ چندتا از انها با ((گل)) شروع می شود؟

ب)چند کلمه 4 حرفی می توان نوشت؟

ج) چند کلمه 4 حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف ((پ)) و ((ر)) در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه 5حرفی می توان نوشت که در انها حروف کلمه ((پیرا)) کنارهم آمده باشند؟

ترکیب:

به هر انتخاب r شی از n شی متمایز که آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیر مجموعه rعضوی از یک مجموعه n عضوی ، یک ترکیب rتایی از n شی می گوییم. تعداد ترکیب های rتایی از n شی متمایز را معمولا با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و داریم:

مثال: الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم ؟ $4!$

ب) به چند طریق می توانیم چهارکتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟ $\binom{4}{1}=4$

مثال: در یک دوره مسابقات کشتی از بین 4 داور ایرانی ، 3 داور ژاپنی و 2 داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود . به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر:

۴ داور ایرانی
۳ ژاپنی
۲ روسی

$n=9$

الف) کمیته 4 نفره باشد؟ $C\binom{9}{4}$

ب) کمیته 3 نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟ $\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{2}{1}=4\times3\times2=24$

ج) کمیته 5 نفره باشد و دقیقا دو داور ایرانی داشته باشد؟ $r=5$

$\binom{4}{2}\times\binom{2+3}{3}=6\times10=60$ ۲ ایرانی و ۳ روسی و ژاپنی

د) کمیته 5 نفره باشد و حداقل 3 داور ایرانی داشته باشد؟

۳ ایرانی و ۲ روسی و ژاپنی یا ۴ ایرانی و ۱ روسی و ژاپنی یا ۵ ایرانی و ۰ روسی و ژاپنی

$\cancel{\binom{5}{0}\times\binom{4}{5}}+\binom{5}{1}\times\binom{4}{4}+\binom{5}{2}\times\binom{4}{3}=5\times1+10\times4=5+40=45$

ه)کمیته 7 نفره باشد و شامل 3 داور ایرانی ، 2 داور ژاپنی ،2 داور روسی باشد؟

پ)کمیته 5 نفره باشد حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

مثال: از کیسه ای که شامل 3 مهره آبی ، 4 مهره قرمز ، 5 مهره سبز است می خواهیم 3 مهره انتخاب کنیم بطوری که

الف) هیچ محدودیتی به میان نباشد؟

ب) 2 مهره قرمز و 1 مهره سبز باشد ؟

ج) مهره ها همرنگ باشند ؟

د)مهره ها همرنگ نباشند؟

ک) حداقل 1 مهره سبز باشد؟

گ) حداکثر 2 مهره قرمز باشد ؟

نکته ۱ ← اگر مجموعه ای n عضو داشته باشد ← 2^n زیرمجموعه دارد

نکته ۲ ← تعداد زیرمجموعه های m عضوی یک مجموعه n عضوی $C\binom{n}{m}$

مثال: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

الف) چند زیر مجموعه دارد؟ $n=7$ $2^7=128$

ب) چند زیر مجموعه 3 عضوی دارد؟ $\binom{7}{3}$

a, b, c, d, e, f, g

ج) چند زیر مجموعه 4 عضوی شامل عضو a وجود دارد؟

a _ _ _

$\binom{6}{3}$

د) چند زیر مجموعه 4 عضوی شامل a , b و فاقد e وجود دارد؟

e a b _ _

$\binom{4}{2} = 6$

احتمال:

مجموعه شامل همه ی این حالت های ممکن ، فضای نمونه ای نامیده می شود. اگر این مجموعه را با S بنامیم ، هر زیر مجموعه مانند S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می نامیم.

مثال: خانواده ای دارای 3 فرزند است، احتمال آن را بدست اورید که :

(پ، پ، پ) (ر-ر-ر)

(پ، پ، ر) (پ، ر، پ)

(پ، ر، پ) (ر، پ، ر)

(ر، پ، پ) (ر، ر، پ)

$2^n = 2^3 = 8$

الف) دقیقا یک دختر در این خانواده متولد شده باشد؟

$P = \frac{3}{8}$

ب) حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد؟

$\frac{4}{8}$

ج) تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند ؟

$\frac{0}{8} = 0$

د) تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد؟

$\frac{4}{8}$

مثال: در جعبه ای 3 مهره ی قرمز و 2 مهره ی آبی قرار دارد. اگر 3 مهره به تصادف از این جعبه خارج کنیم احتمال آن را بدست آوریدکه :

الف) حداقل یک مهره آبی انتخاب شود ؟

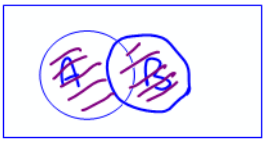
ب) حداکثر یک مهره آبی انتخاب شود؟

ج) هر سه مهره قرمز انتخاب شود؟

پیشامدها و برخی اعمال روی آنها:

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه ای S باشند ، در این صورت :

الف) اجتماع دو پیشامد : زمانی رخ میدهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.



$A \cup B = \{x \mid x \in S ,\ x \in A \text{ یا } x \in B\}$

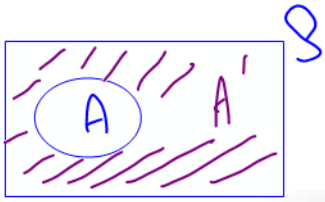
ب) اشتراک دو مجموعه : زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد باهم اتفاق بیفتد .

$A \cap B = \{x \mid x \in S ,\ x \in A \text{ و } x \in B\}$

ج) تفاضل دو پیشامد: زمانی رخ میدهد که A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

$A - B = \{x \mid x \in S ,\ x \in A ,\ x \notin B\}$

د) متمم یک پیشامد: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد ، متمم پیشامد A که با $\grave{A}$ نمایش داده می شود، وقتی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد.

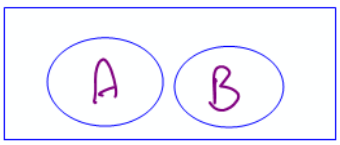


$P_{A'} = 1 - P_A \qquad P_A = 1 - P_{A'}$

$P_A + P_{A'} = 1$

پیشامد ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و b را دو پیشامد ناسازگار می نامیم . در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم اتفاق نمی افتند.



$P(A \cup B) = P_A + P_B$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب میکنیم احتمال آن را بیابید که:

الف) هر دو تاس فرد و مجموع آنها 6 باشد؟

(۱،۵)(۵،۱)(۳،۳)

$P_A = \frac{۳}{۳۶}$

ب) هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس 6 باشد؟

(۲،۴)(۴،۲)
(۱،۵)(۵،۱)
(۳،۳)

(۱،۱)(۱،۳)(۳،۱)(۳،۳)
(۱،۵)(۱،۱)(۳،۵)(۵،۳)
(۵،۵)

$P_B = \frac{۱۱}{۳۶}$

ج)هر دو عدد تاس یکسان باشد؟

$P_C = \frac{۶}{۳۶}$

و)عدد دوم از عدد اول بزرگتر باشد؟

$P_D = \frac{۱۵}{۳۶}$

برای هر دو پیشامد A وB از فضای نمونه ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است :

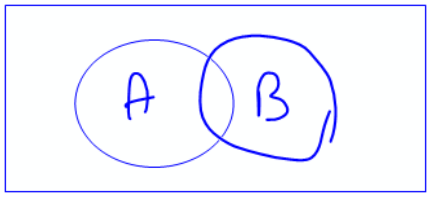
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال اجتماع A و B

احتمال A

احتمال B

احتمال اجتماع دو پیشامد



مقدمه ای بر علم آمار

آمار ، مجموعه ای از اعداد ، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام ، سازماندهی و نمایش ، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری ، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

تعریف جامعه یا جامعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد ، جامعه یا جمعیت نامیده می شود و در هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه ی جامعه یاحجم جامعه گویند.

تعریف نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود ، نمونه گویند و در هر یک از افراد یا اشیا

انتخاب شده را عضو نمونه گویند. که به تعداد اعضای آن ،اندازه ی نمونه یا حجم نمونه گویند.

تعریف متغیر کمی : متغیر هایی را که قابل انـدازه گیـری هسـتند ، متغیـر هـای کمـی گوینـد. (پیوسـته و گسسته)

تعریف متغیر کیفی : متغیر هایی که قابل اندازه گیری نیستند ، کتغیر های کیفی گویند. (ترتیبی ، اسمی)

مثال: انواع متغیر های زیر را مشخص کنید.

الف) سن:

ب)نمره ریاضی نهم :

ج)جنسیت:

د) قد و وزن:

ه) میزان هوش(هوش بالا ، متوسط ، پایین)

وقتی می خواهیم درباره ی موضوعی تحقیق کنیم نیاز به اطلاعاتی داریم کـه بـه آن داده می گویند. داده ها به صورت ارقام یا کلمات توصیفی هستند پس از به دست آوردن اطلاعات و جدول بندب و تحلیل و تفسیر باید نتیجه گیری کنیم. آمار مجموعه ای از اعداد و ارقام است.

علم آمار: مجموعه روش هایی که شامل:

1) جمع آوری اطلاعات
2) سازمان دهی
3) تحلیل و تفسیر
4) نتیجه گیری
5) قضاوت و پیش بینی مناسب

جامعه: به مجموعه ی تمام افرادی که تحقیق راجع به آن ها صورت می گیرد جامعه گویند. تعداد اعضـای جامعه را اندازه یا حجم جامعه گویند.

مثال: وقتی در مورد نمرات ریاضی کلاس دهم مدرسه صحبت می شود جامعه ی آماری کلاس دهم مدرسه و اندازه و حجم آن دانش آموزان کلاس است.

نمونه: هرگاه اندازه ی جامعه به قدری بزرگ باشد که نتوان کل جامعه را بررسی کرد در این صورت قسمتی از جامعه را انتخاب که به آن نمونه گویند و همه ی ویژگی های جامعه را دارد.

سرشماری: اگر مطالعه ی جامعه به گونه ای باشد که کل جامعه بررسی شود به این حالت سرشماری گویند.

متغیر: یک شاخصه و ویژگی از همه ی اعضای جامعه یکسان نیست و از عضو به عضو دیگر تغییر می کند و عددی که به این ویژگی اختصاص می یابد مقدار متغیر است.

متغیر ها بر دو نوع هستند. الف) کمی ب) کیفی

متغیرهای کمی: متغیرها و ویژگی هایی که قابل اندازه گیری هستند.

متغیرهای کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری نیستند.

متغیرهای کمی 2 نوع است:

کمی گسسته: متغیرهایی که مقدار به خود می گیرند تعداد کارمندان

کمی پیوسته: متغیرهایی که در یک بازه بین 2 عدد تا قرار دارند قد دانش آموزان

متغیرهای کیفی 2 نوع است:

کیفی ترتیبی: متغیرهایی که دارای مرحله و ترتیب است تحصیلات دانشگاهی

کیفی اسمی: که قابل اندازه گیری نباشد و ترتیب نداشته باشد جنسیت زن و مرد

مثال: نوع متغیرهای زیر را معلوم کنید.

1) نوع آلایندگی هوا

2) فاصله

3) مقام های ورزشکار

4) سال تولید خودرو

شماره نمره	۱	۲	۳	...	n
نمره	۱۹	۱۷/۵	۱۴		۱۶/۷۵

دنباله ها ← ۱۹ و ۱۷/۵ و ۱۴ و ... ۱۶/۷۵

به هر مجموعه از اعداد که شماره هم قرار گرفته باشند دنباله می گوییم

a_n ← اندیس ← یک جمله از دنباله

شماره جمله ← خود جمله

$n \in N$ طبیعی

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ——— $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$

نکته ← هر دنباله فرمولی دارد که به آن فرمول جمله عمومی می گوییم و آن را با a_n نمایش می دهیم.

مثال: در هر یک از دنباله های زیر چهار جمله اول را بدست آورید:

$a_n = 2n^2 + 4$

$n=1 \to a_1 = 6$

$n=2 \to a_2 = 12$

$n=3 \to a_3 = 22$

$n=4 \to a_4 = 36$

۶ و ۱۲ و ۲۲ و ۳۶ ...

$t_n = n + 3$

$t_1 = 4$

$t_2 = 5$

$t_3 = 6$

$t_4 = 7$

$a_n = \frac{n+1}{2n}$ ۳/۲ و ۴/۶ و ۵/۸

$t_n = -2n - 1$

$n=1 \to t_1 = -3$

$n=2 \to t_2 = -5$

$n=3 \to t_3 = -7$

$n=4 \to t_4 = -9$

فرمول جمله عمومی / جیزتا جمله اول دنباله ها را بدهد باس

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

۱) دنباله مربعی ← $a_n = n^2$ ← ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ ...

۲) دنباله مثلثی ← $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ← ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ ...

a_1 a_3

۳) فیبوناتچی ← ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۱ و ۳۴ و ۵۵ و ۸۹ ...

دنباله ای که ۲ جمله اول برابر ۱ و بعد از آن هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبلی

تست ۱ ← کدام جمله دنباله های $a_n = 2n^2 + 1$ و $b_n = 4n + 7$ با هم برابر است؟

اول $3 \neq 11$ — دوم $9 \neq 15$ — سوم $19 = 19$ — چهارم

تست ۲ ← در دنباله مثلثی مجموع جملات دهم و یازدهم کدام است؟

۱۳۲ — ۱۲۷ — ۱۲۱ — ۱۴۴

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، $n=10$: $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ ، $n=11$: $\frac{11 \times 12}{2} = 66$ ، $55 + 66 = 121$

$121 \to 11^2$

$169 \to 13^2$

تست ۳ ← اگر $3x+10$ و $x+177$ و $x+33$ سه جمله متوالی دنباله فیبوناتچی باشد مقدار x کدام است؟

۲۱۰ — ۱۷۷ — ۱۹۰ — ۲۰۰

$x + 33 + x + 177 = 3x + 10$

$2x + 210 = 3x + 10$

۱ ۱ ۲ ۳ ۵ ۸ ۱۳ ۲۱ ۳۴ ۵۵ ۸۹

$\frac{8 \times 9}{2} = 36$

تست ۴ ← کدام جمله دنباله $a_n = \frac{n^2 - 12}{4n}$ برابر ۱ است؟

دهم — پنجم — چهارم — سوم

$\frac{-1}{4}$ ، $\frac{-4}{8}$

تست ۵ ← مجموع جملات هشتم دنباله مثلثی / فیبوناتچی کدام است؟

11^3 — 9^2 — 12^3 — 11^2

$74 + 36 + 21 = 121$

دنباله بازگشتی ⇐ دنباله مرحله به مرحله هر جمله بدست می آید

مثال: اگر $a_1=1$ و فرمول جمله عمومی $a_n=a_{n-1}+3$ جمله چهارم را بدست آورید؟

$n=1 \to a_1=1$

$n=2 \to a_2=a_1+3=4$

$n=3 \to a_3=a_2+3=7$

$n=4 \to a_4=a_3+3=10$

$1, 4, 7, 10, \ldots$

$a_n=2a_{n-1}+2 \qquad a_1=3$

$n=1 \to a_1=3$

$n=2 \to a_2=2a_1+2=8$

$n=3 \to a_3=2a_2+2=18$

$n=4 \to a_4=2a_3+2=38$

$a_{n+1}=-2a_n-n \qquad a_1=2$

$n=1 \to a_2=-2a_1-1=-5$

$n=2 = a_3=-2a_2-2=8$

$n=3 = a_4=-2a_3-3=-19$

$\cancel{n=4}$

الگوهای

الگوهایی که در انها اختلاف هر دو جمله ی متوالی عددی ثابت باشد را الگوی خطی می نامند. دلیل نام گذاری این الگوها این است که مختصات تمام نقاط این الگو در معادله خط گفته شده ، صدق می کند.

به طور کلی الگوهایی که جمله عمومی انها بصورت $t_n = an + b$ می باشد را الگوهای خطی می نامیم که در آن bوa اعدادحقیقی دلخواه و ثابت هستند.

نکته: میزان تغییر جملات متوالی این الگو برابر با ضریب n می باشد.

مثال: c_n جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن $c_۴ = ۱۷$ و $c_{۱۰} = ۴۱$ در این صورت حاصل c_n را مشخص کنید؟

دنباله

الگوهای عددی که در آن تعدادی عدد پشت سرهم قرارمی گیرند را یک دنباله می نامیم. این اعداد ، جملات دنباله نامیده می شوند.

مثال: در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید؟

الف) $-۱, -۲, -۳, -۴, \ldots$

ب) $۵, ۱۸, ۳۱, ۴۴, \ldots$

پ) $۱, \sqrt{۳}, \sqrt{۵}, \sqrt{۷}, \ldots$

ت) $-۲, ۱, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

د) $۱, ۲, ۴, ۷, \ldots$

ح) $۰.۱, ۰.۰۱, ۰.۰۰۱, \ldots$

ف) $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸ \ldots$

ه) $-۱, ۸, ۲۷, -۶۴, ۱۲۵, \ldots$

دنباله ی حسابی :

دنباله ای از اعداد که اختلاف بین هر دو عدد آن ، مقدار ثابتی به نام قدر نسبت (d) است را دنباله ی حسابی می نامیم .

$a_۱, a_۱ + d, a_۱ + ۲d, \ldots \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d$ جمله عمومی

چند مثال مهم:

مثال: جمله ی دهم از دنباله ی حسابی .... و 3 و 0 و 3- را بدست آورید .

مثال: دنباله ی حسابی 279و...و7و3و1- را در نظر بگیرید .

الف : این دنباله چند جمله دارد ؟

ب : عدد 51 جمله ی چندم این دنباله است ؟

مثال : در دنباله ی حسابی ... و 100- و 103- چند جمله ی کوچکتر از 5 وجود دارد ؟

اگر a_m, a_n دو جمله ی غیر متوالی از یک دنباله باشند داریم :

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

اگر سه عدد a ، b و c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند ، در این صورت 2b=a+c را واسطه حسابی a و c می گوییم .

مثال: بین 20 و 80 دو واسطه حسابی درج کنید؟

مثال : در یک تصاعد عددی $a_{۷} = ۲۰$ ، حاصل $a_{۳} + q_{۱۱} + a_{۶} + a_{۸}$ چقدر است ؟

مثال: در یک دنباله عددی ،مجموع جملات اول ، دوم و سوم برابر 12 و مجموع جملات هفتم ، هشتم ، نهم برابر 48 است . قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

مثال : اگر به قدر نسبت یک دنباله ی حسابی 4 واحد اضافه کرده و از جمله ی اول آن 3 واحد کم کنیم ، جمله بیستم آن چه تغییری نسبت به قبل می کند ؟

مثال: در یک تصاعد حسابی ،مجموع پنج جمله ی اول تصاع برابر 5 و مجموع 5 جمله ی دوم تصاعد برابر 20 است . قدر نسبت این تصاعد از جمله ی اول چقدر بیشتر است ؟

نمونه سوال

۱

با ارقام ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که در آن‌ها هم رقم زوج و هم رقم فرد وجود داشته باشد؟

1) 156
2) 203
3) 219
4) 252

۲

از بین ۳ دانش‌آموز سال دهم و ۴ دانش‌آموز سال یازدهم، ۴ نفر انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل ۲ دانش‌آموز سال دهم وجود داشته باشد کدام است؟

1) $\frac{22}{35}$
2) $\frac{23}{35}$
3) $\frac{43}{70}$
4) $\frac{45}{70}$

۳ مجموع ۲۰ عدد طبیعی فرد متوالی و مضرب ۵ که کوچک‌ترین آن‌ها ۱۱۵ است، کدام است؟

1) 3250
2) 4200
3) 400
4) 2400

۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه« system » به‌طوری‌که حروف s کنار هم نباشند، کدام است؟

1) 120
2) 180
3) 240
4) 360

۵

درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی آبی قرار دارد. اگر ۲ مهره باهم از ظرف بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند؟

1) $\frac{13}{22}$
2) $\frac{17}{33}$
3) $\frac{43}{66}$
4) $\frac{47}{66}$

۶ در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۹ جمله‌ی اول برابر ۹۰ و جمله‌ی هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جمالت متوالی، کدام است؟

1) 1/5
2) 2
3) 2/5
4) 3

۷ جواب معادله $\frac{2}{35}=\frac{(n-2)!}{n!}+\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ کدام است؟

1) 5
2) 6
3) 7
4) 8

۸ مجموع ۳ جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۱۸ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۹۲ است. اگر دنباله صعودی باشد، جمله کوچک‌تر کدام است؟

1) 8
2) 6
3) 4
4) 2

۹ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد، مساحت آن کدام است؟

1) 12
2) 16
3) 24
4) 28

۱۰ درون جعبه‌ای ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ قرار دارد. ۳ کارت به‌تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال شماره‌ی این سه کارت متوالی است؟

1) $\frac{1}{4}$
2) $\frac{1}{5}$
3) $\frac{1}{6}$
4) $\frac{1}{7}$

۱۱ در یک رأی‌گیری که شامل ۴ رأی موافق، ۳ رأی مخالف و ۲ رأی ممتنع است، اگر ۳ رأی به‌تصادف خوانده شود، با کدام احتمال حداقل ۲ رأی موافق در بین آن‌ها وجود دارد؟

1) $\frac{13}{42}$
2) $\frac{17}{42}$
3) $\frac{11}{52}$
4) $\frac{19}{52}$

۱۲ از بین اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰، عددی به‌تصادف انتخاب‌شده است و پیشامدهای A و B چنین تعریف می‌شوند: A = عدد، مضرب ۳ است. B = عدد، مربع کامل است. احتمال آنکه پیشامد رخ دهد کدام است؟

1) 0/2
2) 0/3
3) 0/4
4) 0/5

۱۳ جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n = n^2 - (n+1)^2$ است. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله کدام است؟

1) 60
2) -60
3) 120
4) -120

۱۴ با حروف کلمه "ELECTION" چند کلمه رمز ۴ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف باشد؟

1) 90
2) 120
3) 180
4) 360

۱۵ به چند روش ممکن است از بین ۱۵ دانش‌آموز، ۳ نفر آن‌ها را برای مسئول کتابخانه، مسئول گروه سرود و مسئول گروه تئاتر دانش‌آموزان انتخاب کرد؟

1) 455
2) 910
3) 1365
4) 2730

۱۶ اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی باشد، آنگاه حاصل $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}$ کدام است؟

1) $\frac{a-1}{a_1a_n}$
2) $\frac{n}{a_1a_n}$
3) $\frac{2n-2}{a_1a_n}$
4) $\frac{2n}{a_1a_n}$

۱۷ از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟

1) $\frac{4}{7}$
2) $\frac{5}{7}$
3) $\frac{1}{7}$
4) $\frac{6}{7}$

۱۸ از بین ۱۲ خانواده انجمن اولیاء مدرسه به چند طریق می‌توان ۴ خانواده انتخاب کرد که در آن‌ها زن یا شوهر شرکت کنند؟

1) 495
2) 720
3) 840
4) 990

۱۹ با جایگشت ارقام چند عدد پنج‌رقمی زوج حاصل می‌شود؟

1) 84
2) 96
3) 104
4) 120

۲۰ از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی، به چند حالت ۳ عدد را می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که تشکیل یک دنباله‌ای حسابی دهند؟

1) 12
2) 16
3) 20
4) 24

۲۱ با ارقام طبیعی ۱ ، ۲ ... و ۹ چند عدد پنج‌رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت به‌طوری‌که ارقام ، 1 و2 و 3 در آن‌ها حتماً باکار رفته و در کنار هم باشند؟

1) 540
2) 120
3) 180
4) 360

۲۲ اگر در یک دنباله‌ای حسابی $a_2=-1, a_5-a_3=1$ باشد، جمله‌ی چندم دنباله برابر صفر است؟

1) سوم
2) چهارم
3) پنجم
4) ششم

۲۳ اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، تشکیل دنباله عددی می‌دهند، نسبت بزرگ‌ترین ضلع مثلث به کوچک‌ترین ضلع آن چه قدر است؟

1) $\frac{12}{5}$
2) $\frac{4}{3}$
3) $\frac{5}{4}$
4) $\frac{5}{3}$

۲۴ بین دو عدد ۱۰ و ۱۲ ، نوزده واسطه حسابی درج کرده‌ایم جمله دهم دنباله حسابی حاصل کدام است؟

1) 9/9
2) 10
3) 10/9
4) 11

۲۵ احتمال آن‌که مجموع دو تاس پرتاب‌شده باهم کوچک‌تر از ۹ باشد، چه قدر است؟

1) $\frac{5}{12}$
2) $\frac{7}{9}$
3) $\frac{13}{18}$
4) $\frac{2}{3}$