ریاضی و آمار ۲

فصل دوم

درس ۱: توابع ثابت ، چندضابطه‌ای و همانی

درس ۲: توابع پله‌ای و قدر مطلق

درس ۳: اعمال روی توابع

ریاضی و آمار ۲

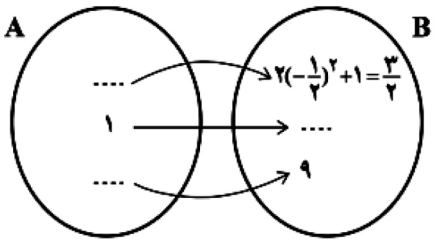
درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع ، دامنه و برد آشنا شدید.

تمرین ۱: اگر $A=\left\{-\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$ **و** $f(x)=\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=۲x^{۲}+۱\end{cases}$ **باشد، با توجه به نمایش‌های مختلف تابع قسمت‌های زیر را کامل کنید.**

الف) در نمایش پیکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A داریم:



بنابراین برد f مجموعه { , , } = B است. نمایش پیکانی رابطه فوق بیانگر یک

زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً ..... خارج شده است.

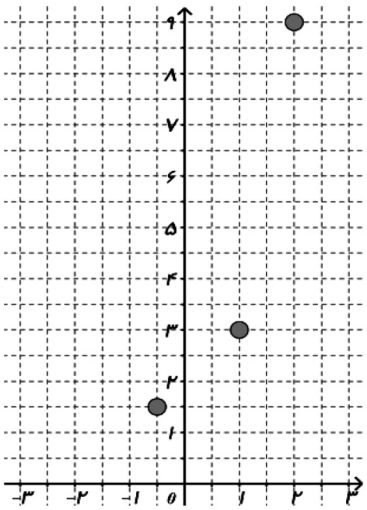
ب) نمایش زوجی مرتبی آن به‌صورت زیر است:

$$f=\left\{\left(\quad,\frac{۲}{۳}\right),(۱,\quad),(\quad,۹)\right\}$$

$$D_f=\{\quad,۱,\}\quad\text{و}\quad R_f=\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$$

مجموعه‌های D_f و R_f دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهد.

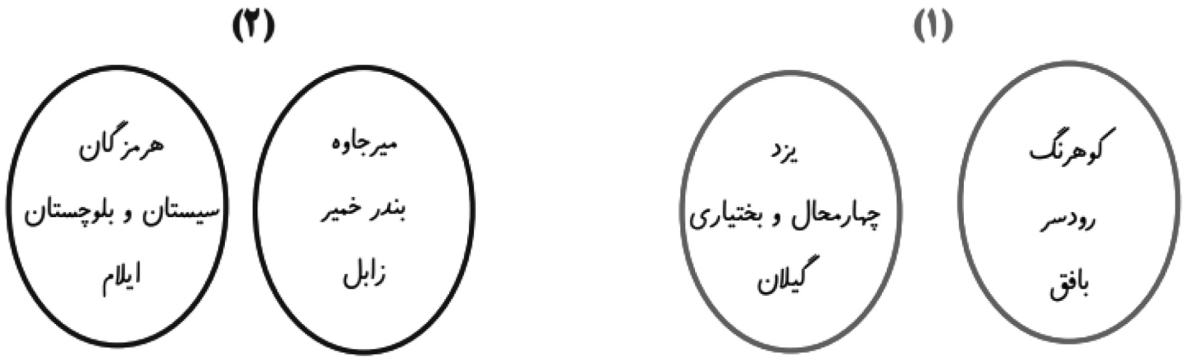
پ) نمایش مختصاتی آن نیز چنین است؛ تصویر این نقاط بر روی



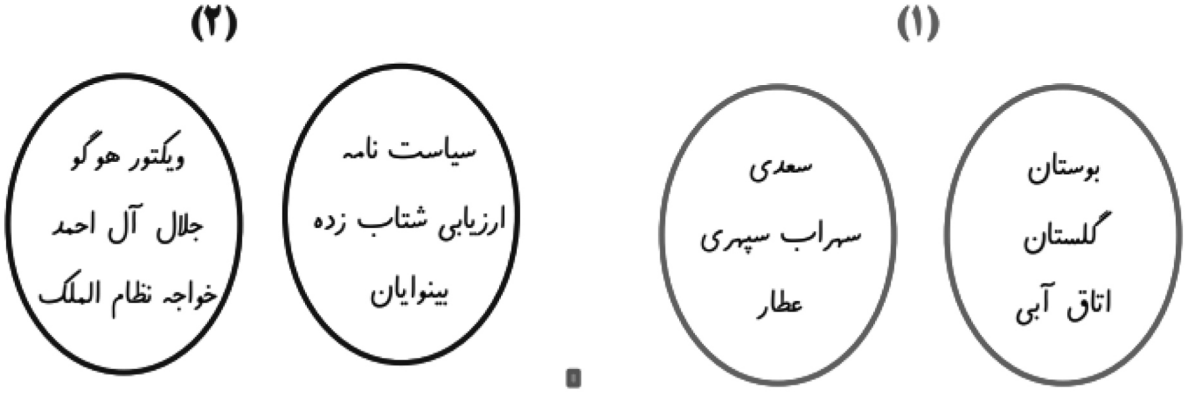
محور x ها؛ یعنی { ,۱, } دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور yها $\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$ برد تابع نامیده می‌شود.

تمرین ۲ : **ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته‌شده را کامل کنید .**

الف) رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

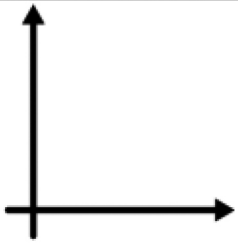


ب) رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



تمرین ۳ : **حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌های تمرین قبل که تابع هستند، کامل کنید.**

	نمایش جدولی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
الف			

ب			

با توجه به جدول بالا:

نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

انواع توابع (ثابت ، چندضابطه ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

دیران یک فروشگاه به دلایلی تصمیم گرفته‌اند هزینه استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به‌صورت هوشمند تعیین کنند.

پیش‌ازاین، هزینه استفاده از توقفگاه ثابت بوده است. (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مداربسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفته هر فصل شمارش‌شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از ۱جدول روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده‌شده است. این اطلاعات در جدول زیر نمایش داده‌شده است:

جدول ۱	ساعت اول ۸-۹	ساعت دوم ۹-۱۰	ساعت سوم ۱۰-۱۱	ساعت چهارم ۱۱-۱۲	ساعت پنجم ۱۲-۱۳	ساعت ششم ۱۳-۱۴	ساعت هفتم ۱۴-۱۵	ساعت هشتم ۱۵-۱۶	ساعت نهم ۱۶-۱۷	ساعت دهم ۱۷-۱۸	ساعت یازدهم ۱۸-۱۹	ساعت دوازدهم ۱۹-۲۰
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یکشنبه	۱۱	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنج‌شنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۴۰	۶۱۰	۷۴۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۴۰	۴۱۰

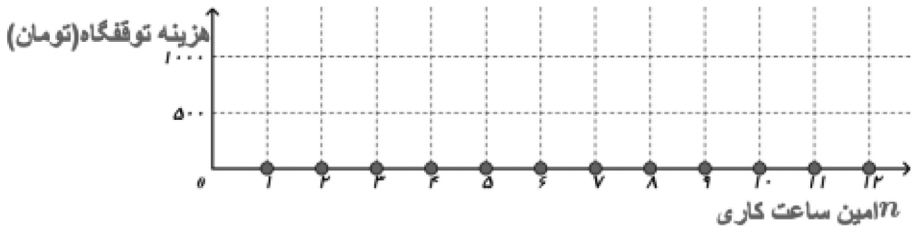
با در نظرگرفتن جدول صفحه قبل، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول زیر تعیین‌شده است:

جدول ۲

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو)تومان)
۰-۱۰۰	**رایگان**
۱۰۰-۲۰۰	**۵۰۰ تومان**
۲۰۰-۳۰۰	**۱۰۰۰ تومان**
۳۰۰-۴۰۰	**۱۵۰۰ تومان**
۴۰۰-۵۰۰	**۲۰۰۰ تومان**
۵۰۰-۶۰۰	**۲۵۰۰ تومان**
۶۰۰-۷۰۰	**۳۰۰۰ تومان**

تابع ثابت

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «n امین ساعت کاری فروشگاه – هزینه دریافتی» را برای روز شنبه در نخستین هفته هوشمند سازی رسم می‌کنیم.



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است؛ تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به‌صورت $\begin{cases} C: A \to B \\ C(n)=0 \end{cases}$ است که در آن $D_C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 12\}$ دامنه تابع و $R_C = \{0\}$ برد تابع **C** را تشکیل می‌دهند.

تمرین ۴: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی در جدول ۲ نمودار زیر را بـرای روز یکشـنبه کامل کنید.

تابع را که در آن مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است

تمرین ۵: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطـابق جـدول ۲ نمـودار زیـر را بـرای روز دوشنبه کامل کنید.

الف) جاهای خالی را کامل کنید.

ب) دامنه روز دوشنبه چه تفاوت‌هایی با دامنه نمودار در روز شنبه و یکشنبه دارد؟

$$\begin{cases} C : AB \\ Cx = \end{cases}$$

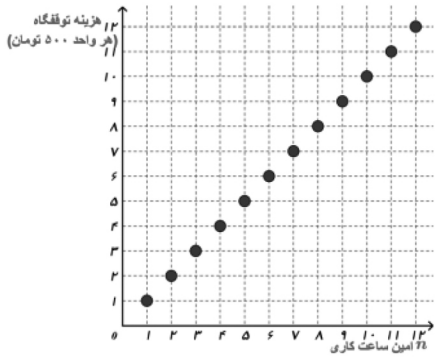
$$R_C = \{ \quad \}$$

$$D_C \{ x \in \mathbb{R} | \quad \}$$

پ) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

تابع همانی

تمرین ۱۴: برای روز پنج‌شنبه به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی n واحد هر واحد ۵۰۰ تومان باشد بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:

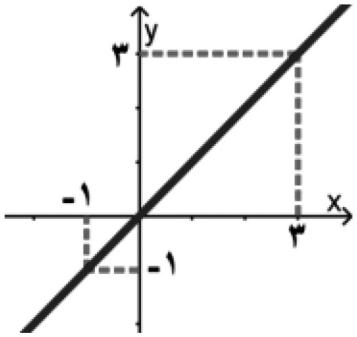


الف) مجموعه نقاط نمودار را به‌صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان‌دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟

ب) اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالـت دامنـه و برد آنچه تغییری می‌کند؟

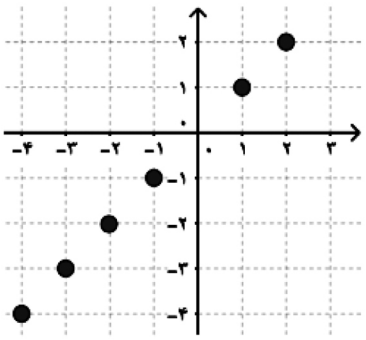
تابع با ضابطهٔ $f(x)=x$ را تابع همانی می نامند. با توجه به ضابطهٔ تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. $R_f = \mathbb{R} \, . \, D_f = \mathbb{R}$

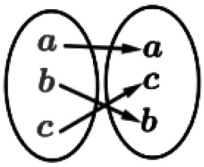
ازلحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.



تمرین ۱۵ : **نمونه‌هایی از توابع همانی در اینجا ارائه‌شده‌اند، دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.**

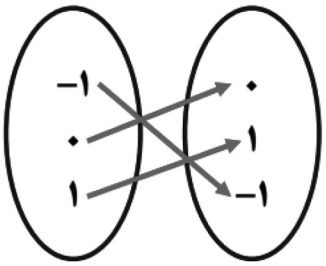
x	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$
y	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$



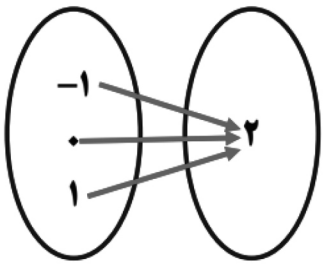


تمرین ۱۶ : **نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.)ثابت ، همانی ، چند ضابطه‌ای)**

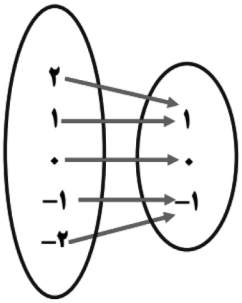
الف



ب



پ



تابع پلکانی

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه‌بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک‌خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت درواقع مصرف یک وسیله هزار واتی در مدت‌زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت (kwh) برق مصرف کرده‌ایم.

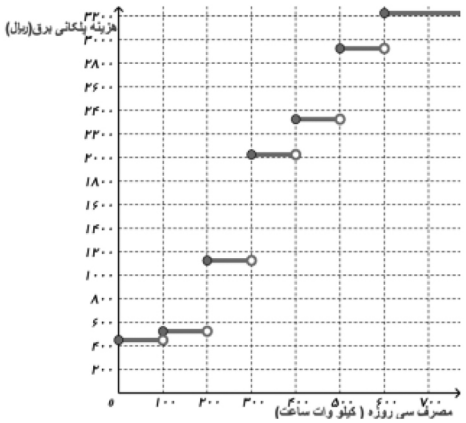
اگر فرض کنیم مصرف برق یک‌خانه در سی روز ۲۴۶ / ۳۳kwh بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به‌صورت پلکانی تقسیم می‌شود

پله‌های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰

مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵	۴۶/۲۳	۵۳۰۰۴
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۲۵		
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۳۲۵		
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۹۲۶		
مازاد بر ۶۰۰	۳۲۲۶		

مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند. (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش‌افزوده و عوارض برق و ... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

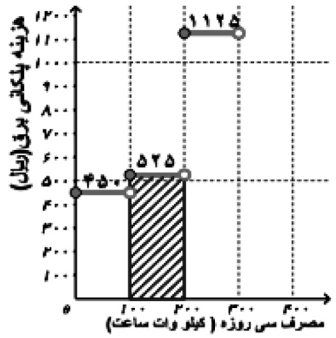
جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد



هر تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را تابع پلکانی می نامند.

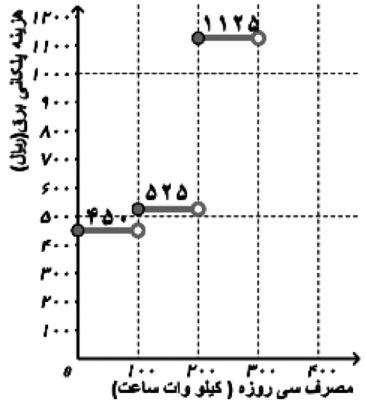
تمرین ۱۷ : به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک‌خانه:

الف) هزینه ۱۰۰kwh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



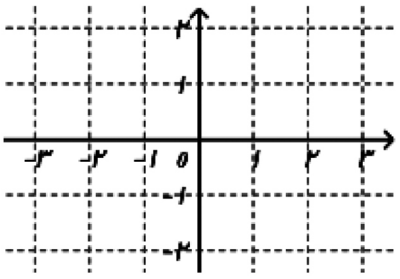
ب) مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

پ) هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید

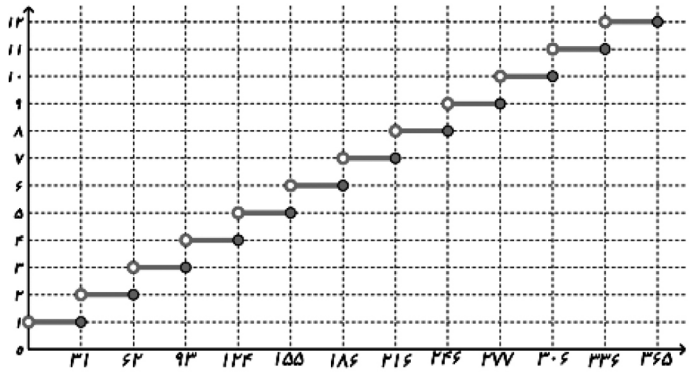


تمرین ۱۸: بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y=f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



تمرین ۱۹ : نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحـــدهای آن‌ها را مشخص کنید. ضابط۵ تابع را بنویسید؟



تمرین ۲۰ : **هرکدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.**

یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.

پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.

چراغ راهنمایی و رانندگی سه‌حالته

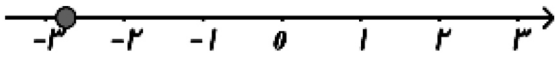
تابع جزء صحیح

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

مثال: در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد.

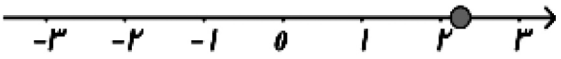
به بیانی دیگر:

اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲- و ۳- باشد، تابع g مقادیر x را به عدد ..... نسبت می‌دهد.



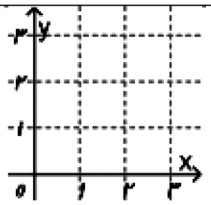
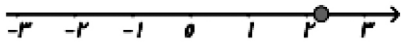
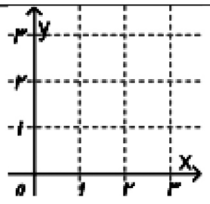
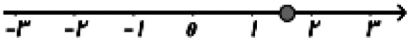
$\ldots\ldots \le x < x\ldots\ldots \Rightarrow g(x) = \ldots\ldots$

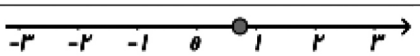
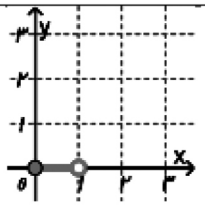
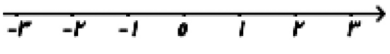
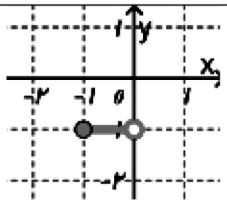
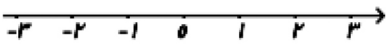
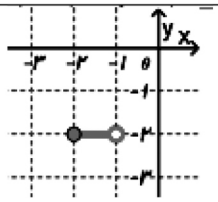
و اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد ..... نسبت می‌دهد.



$\ldots\ldots \le x < x\ldots\ldots \Rightarrow g(x) = \ldots\ldots$

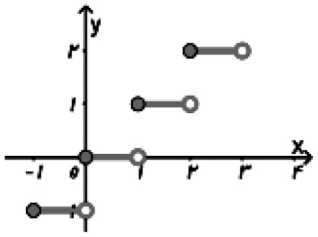
تمرین ۲۱: **به کمک تابع g که در بالا تعریف‌شده است، جدول زیر را کامل کنید.**

نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x) =$	 $2 \le x < 3$
	$g(x)$	 $1 \le x < 3$

 $0 \le x < 1$	$g(x) =$	
 $\le x <$	$g(x) =$	
 $\le x <$	$g(x) =$	

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چند ضابطه‌ای و نمودار متناظرش به‌صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

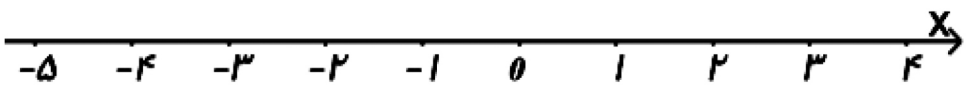


تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و عدد صحیح k را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح می نامند. ضابطهٔ این تابع را با $g(x) = [x]$ معرفی می کنند.

تمرین ۲۱ : به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد ، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

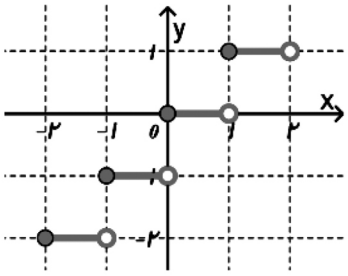
$[۰/۷]=$ $[-۲/۷]$ $[۲/۷]=$ $[۲]=$

$[-۲/۲]=$ $[-\pi]=$ $[-۳/۲]=$ $[-۰/۰۷]=$ $[-۰/۷]=$



تمرین ۲۲: نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $-۲\le x<۲$ رسم کنید.

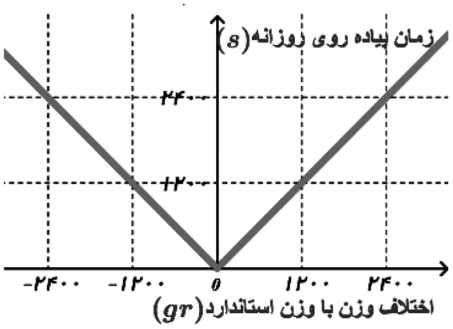
x	$y=[x]$	نقطه ابتدایی	نقطه انتهایی
$۱\le x<۲$	$y=۱$	$(۱,۱)$	$(۲,۱)$
$۰\le x<۱$	$y=۰$	$(۰,۰)$	$(۱,۰)$
$-۱\le x<۰$	$y=-۱$	$(-۱,-۱)$	$(۰,-۱)$
$-۲\le x<-۱$	$y=-۲$	$(-۲,-۲)$	$(-۱,-۲)$



تابع قدرمطلق

هرچند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه‌وزن رنج می‌برند. بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند.

هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه‌وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه یعنی ۲۰ دقیقاً روزانه به‌صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه‌وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه



این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد

اگر مقدار اضافه‌وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی برحسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش‌گفته را به‌صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$f(-۲۴۰۰)=۲۴۰۰ \qquad f(۲۴۰۰)=۲۴۰۰ \qquad f(-۱۲۰۰)=۱۲۰۰ \qquad f(۱۲۰۰)=۱۲۰۰$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را به‌قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند

تابع با ضابطه $f(x)=|x|$ ، *تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعریف؛*

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

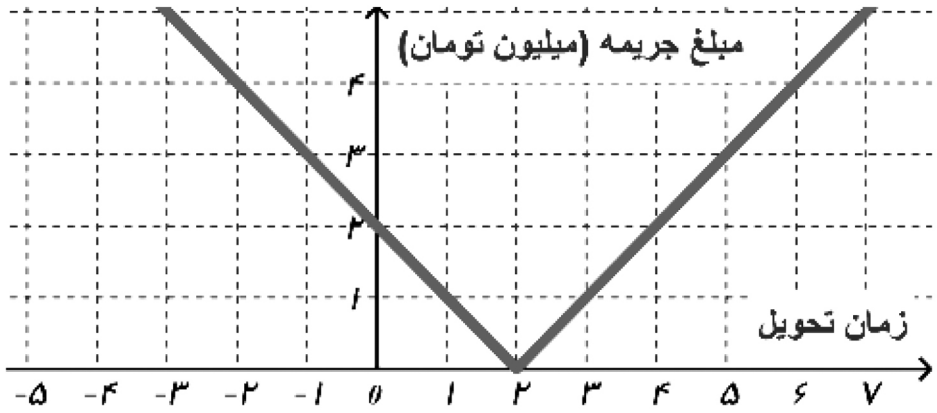
تمرین ۲۳ : بر اساس قرارداد میان پیمانکار پل رودخانه سیمینه‌رود و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف بازمان تحویـل، پیمانکار متعهد است یک‌میلیون جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به‌روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد.

الف) نمودار جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید . (زمان تحویل تیرماه ۱۳۹۵)

ب) آیا می‌توان این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟

پ) اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه را در چه ماه یا ماه‌هایی انجام‌شـــده اســـت؟ چرا؟

تمرین ۲۴: با توجه به نمودار



الف) شرایط تحویل ندادن به‌موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پ) به کمک تعریف تابع قدر مطلق ، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

ت) شیب‌خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمان‌کار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

تمرین ۲۵: **نمودار تابع** $y=|2x-6|$ **را رسم کنید.**

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق

$$|\mu|=\begin{cases}\mu & \mu\geq 0\\ -\mu & \mu<0\end{cases}$$

$$|2x-6|=\begin{cases}2x-6 & 2x-6\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 6 \Rightarrow x\geq 3\\ -2x-6 & 2x-6<0 \Rightarrow 2x<6 \Rightarrow x<3\end{cases}$$

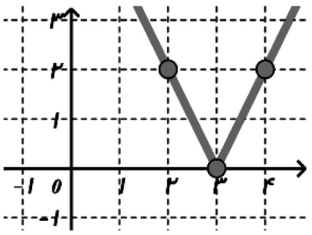
پس ضابطه تابع این‌گونه مشخص می‌شود؛

$$y=|2x-6|=\begin{cases}2x-6 & x\geq 3\\ -2x+6 & x<6\end{cases}$$

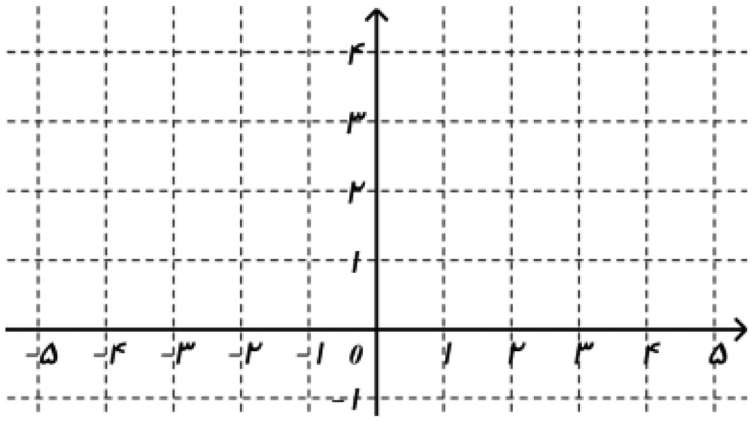
و نمودار تابع به‌صورت زیر رسم می‌شود:

x	۲	۳
y	۲	۰

x	۳	۴
y	۰	۲

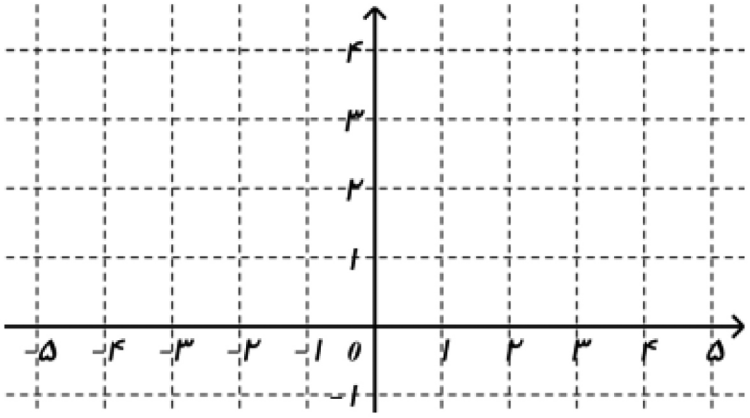


تمرین ۲۶ : **الف) نمودار توابع** $y=|x-4|$ **و** $y=|x|$ **را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.**

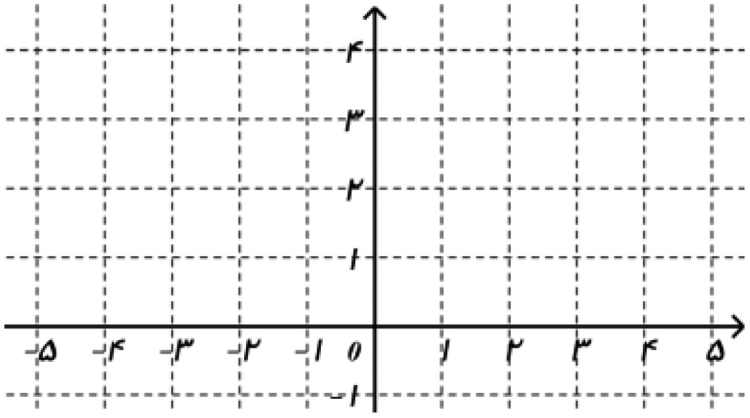


ب) آیا می‌توان بدون مراحل بالا، بر اساس نمودار $y=|x|$ ، نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

پ) نمودار تابع $y=|x-۳|$ و $y=|x+۱|$ را با توجه به نتیجه قسمت «ب» رسم کنید



ت) نمودار تابع $y=|x|+۱$ را چگونه می‌توان بر اساس نمودار $y=|x|$ رسم نمود؟



تمرین ۲۷ : **علیرضا ، دانشجوی رشته اقتصاد است و می‌خواهد پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده‌ساله) را به تماشای یک فیلم یا تئاتر جشنواره دهه فجر دعوت کند. او ابتدا به خانواده‌اش پرسش‌نامه‌ای می‌دهد تا فیلم یا تئاتر موردعلاقه‌شـان را انتخاب کنند. زیرا او تمایل دارد با هرکدام از اعضای خانواده‌اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سـینمایی آن‌هـا و خودش را تأمین کند**

با توجه به بودجه محدودی که او برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینه صرف شده در این هفتـه چقدر خواهد بود.جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشـنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱ هزینه بلیط با توجه به گروه‌های مختل

مکان نمایش / گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰
دانشجو	=۲۰٪ تخفیف	=۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	=۵۰٪ تخفیف	=۵۰٪ تخفیف

علیرضا نتایج پرسش‌نامه داده‌شده به اعضای خانواده را در جدول‌های زیر مشخص نمود:

جدول ۲ علاقه‌مندی به سینمای کودک و نوجوان

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
مریم	✓		✓	✓
علیرضا		✓	✓	✓

جدول ۳- علاقه‌مندی به سینما

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه‌ای	علمی - تاریخی
مادر	✓			✓		✓
پدر		✓	✓	✓		
مریم						
علیرضا		✓		✓		✓

جدول ۴ علاقه‌مندی به تئاتر

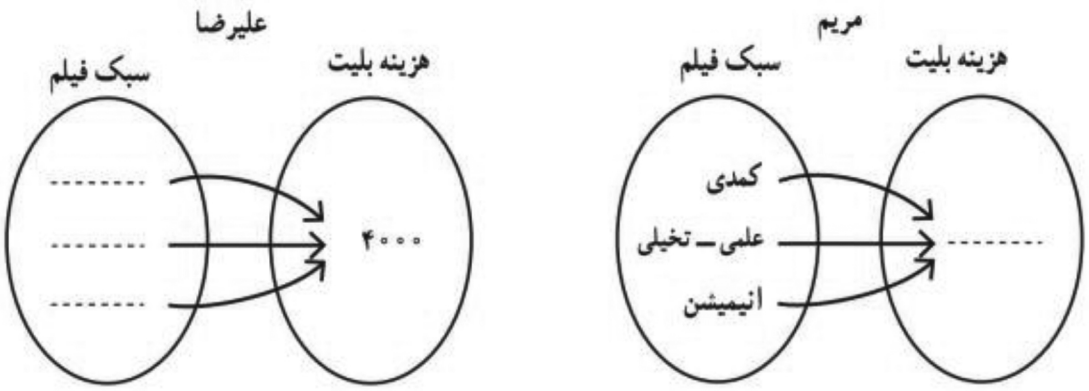
سبک تئاتر / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر	✓	✓	✓	
پدر		✓	✓	✓
مریم	✓		✓	
علیرضا		✓	✓	

در نخستین روز هفته)شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کـودک و نوجـوان ببـرد. او باید دو نکته را مشخص کند:

۱ – به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟ ۲ – هزینه بلیت آن‌ها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه‌مند باشند؛ به‌بیان‌دیگر ایـن سبک فیلم در اشتراک علاقه ، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظـر بگیـریم کـه دامنه آن سبک فیلم موردعلاقه هرکدام باشد و برد آن هزینه خرید بلیت، نمایش پیکانی این دو تابع به‌صورت زیر است:

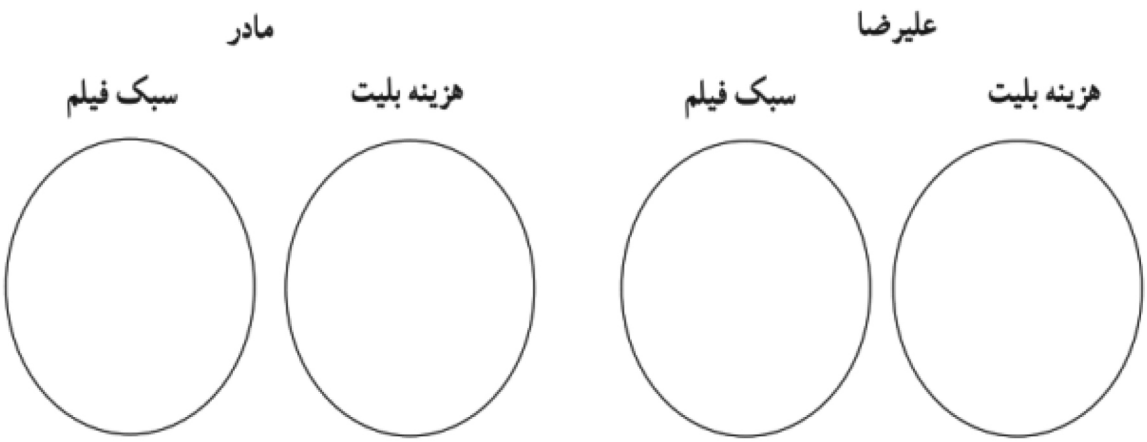
ب) نمایش پیکانی این دو تابع را کامل کنید.



پس اشتراک فیلم موردعلاقه‌شان دو سبک فیلم ..... و ..... است و برای تماشای یکی از این دو سبک یـا هردو نوع آن‌ها می‌توانند به سینما بروند.

تمرین ۲۸ : اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جـدول ۱ و ۳:

الف) نمایش پیکانی مشابه تمرین صفحه قبل را برای هرکدام رسم کنید.



ب) با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه هرکدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج) هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟

تمرین ۲۹ : پنج‌شنبه علیرضا می‌خواهد همه اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و ۴ :

الف) نمایش زوج مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همه آن‌ها به تماشای یک تئاتر می‌روند، مشخص کنید.

ب) علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

تمرین ۳۰ : با توجه به تمرین‌های قبل با چه شرایطی می‌توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

همان‌گونه که عمل جمع، تفریق ، ضرب و تقسیم در مورد دو عدد و دو چندجمله‌ای انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است.

اگر f و g تابع باشند. توابع و دو تابع حقیقی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f+g}=D_f \cap D_g$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f-g}=D_f \cap D_g$$
$$(f\times g)(x)=f(x).g(x) \quad \rightarrow \quad D_{f.g}=D_f \cap D_g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{gx} \quad \rightarrow D\frac{f}{g}=Df \cap Dg=\{x|g(x)=۰\}$$

تمرین ۳۱: اگر $f=\{(۱,۲),(-۳,۴),(۳,۵),(۷,-۱)\}$ **و** $g=\{(۲,۱),(۳,-۱),۷,۲\}$ **، ابتدا دامنه تابع را به دست آورید و سپس را به‌صورت مجموعه‌ای زوج‌های مرتب نشان دهید.**

حل:

$$D_f=\{۱,-۳,۳,۷\} \qquad Dg=\{۲,۳,۷\} \quad \Rightarrow \quad D_{f\cap g}=\{۳,۷\}$$

$$f+g=\{(۳,۵,(-۱)),(۷,-۱+۲)\}=\{(۳,۴),(۷,۱)\}$$

تمرین ۳۲: اگر $f=\{(-۲,۵),(۷,۹),(-۶,-۴),(۳,۰)\}$ **و** $g=\{(-۳,۸),(-۲,۰),(۳,۱۱),(۷,۱)\}$ **باشند. دامنه توابع زیر را به دست آورید و سپس توابع خواسته‌شده را به‌صورت مجموعه‌ای زوج‌های مرتب نشان دهید.**

$D_f =$ $D_g =$ $D_{f \cap g} =$

الف) $(f+g) =$

ب) $(f-g)=$

پ) $(f\times g)=$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)=$

تمرین ۳۳: با توجه به ضابطه‌های $f_1(x)=x^2-1$ و $f_2(x)=x+1$:

الف) ضابطه توابع زیر را به دست آورید.($\mathbb{R}$ دامنه مشترک هردو تابع است.)

$f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)=(x^2-1)+(x+1)=x^2+x \Rightarrow f_3(x)=x^2+x$

$f_4(x)=f_1(x)-f_2(x)=(x^2-1)-x+1=x^2-1-x-1=x^2-x-2 \Rightarrow f_4(x)=x^2-x-2$

$f_5(x)=f_2(x)-f_1(x)= \Rightarrow f_5(x)=$

$f_6(x)=f_1(x)\times f_2(x) \Rightarrow f_6(x)=$

$f_7(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \Rightarrow f_7(x)=$

$f_8(x)=\frac{f_2(x)}{f_1(x)}= \Rightarrow f_8(x)=$

ب) مقادیر تابع‌های f_3 و f_8 به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$f_3(x)=x^2+x \Rightarrow f_3(2)=(2)^2+(2)=4+2=6$

$f_4(x)=f_4(x)=x^2-x-2 \Rightarrow f_4{}^2=(2)^2-(2)-2=4-2-2=0$

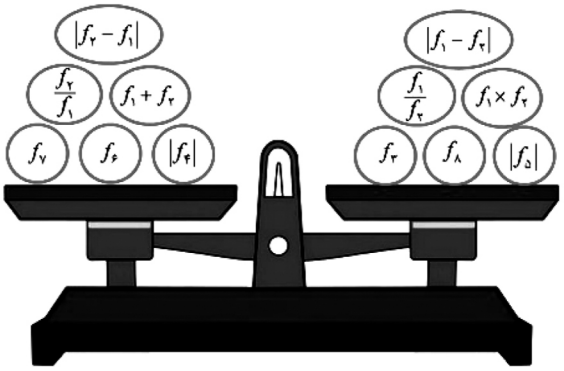
$f_5(x)= \Rightarrow f_5(2)=$

$f_6(x)= \Rightarrow f_6(2)=$

$f_7(x)= \Rightarrow f_7(2)=$

$f_8(x)= \Rightarrow f_8(2)=$

پ) اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌ای کفه ترازو باشند، چرا دو کفهٔ ترازو باهم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



تمرین ۳۴: با توجه به ضابطه‌های $f(x)=x+1$ و $g(x)x-1$:

الف) مقادیر تابع‌های زیر به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$f(2)=$ $\Rightarrow$ $g(2)=$

$h_1(x)=f(x)+g(x)$ $\Rightarrow$ $h_1(2)=$

$h_2(x)=f(x)-g(x)=$ $\Rightarrow$ $h_2(2)=$

$h_3(x)=g(x)-f(x)=$

$h_4(x)=f(x)\times g(x)=$

$h_5(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=$

$h_6(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=$

$h_7(x)=\frac{h_1(x)}{h_3(x)}=$

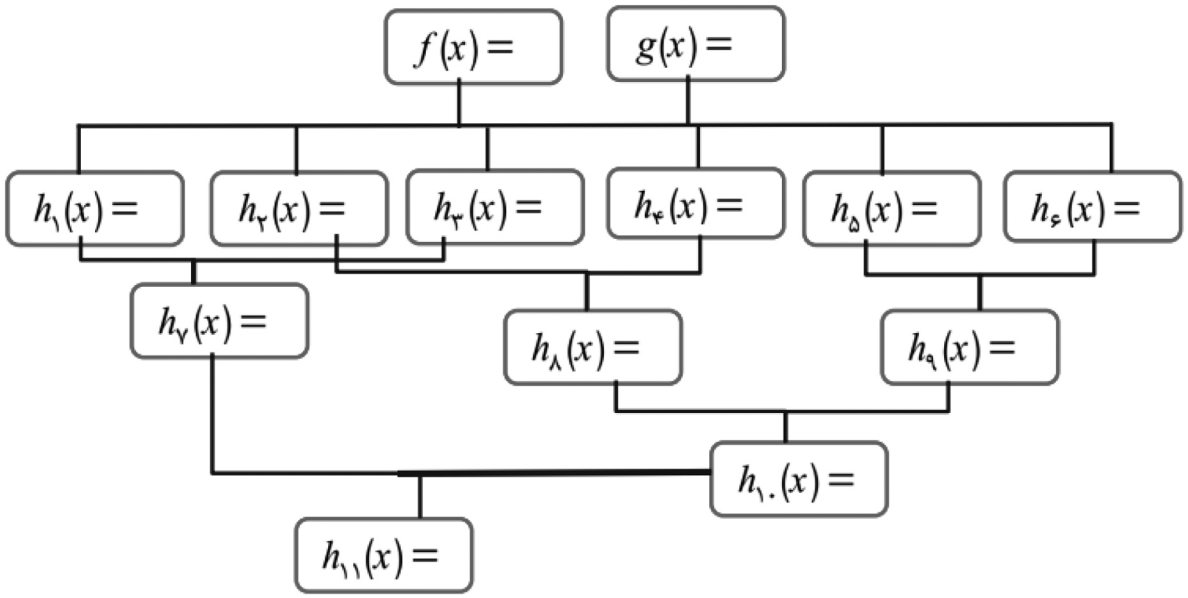
$h_8(x)=h_2(x)\times h_4(x)$

$h_9(x)=h_5(x)+h_6(x)$

$h_{10}(x)=h_8(x)\times h_9(x)$

$h_{11}(x)=h_7(x)\times h_{10}(x)$

ب) درخت زیر به ازای $x=2$ کامل کنید.



تمرین ۳۵: اگر $f=\{(2,0),(4,-1),(-1,-3)\}$ **و** $g=\{(2,5),(3,-1),(-1,2)\}$ **باشند، دامنه توابع زیر را به دست آورید و سپس توابع خواسته‌شده را به‌صورت مجموعه‌ای زوج‌های مرتب نشان دهید.**

$D_{f\cap g}=$ $D_g=$ $D_f=$

الف) $f+g$

ب) $(f-g)=$

پ) $(g-f)=$

ت) $(f\times g)=$

ث) $\left(\frac{f}{g}\right)=$

ج) $\left(\frac{g}{f}\right)=$

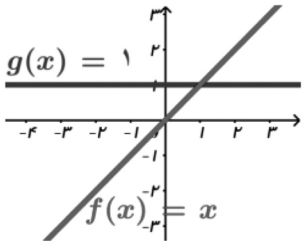
تمرین ۳۶: به کمک نمودارهای رسم شدهٔ توابع f و g نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.

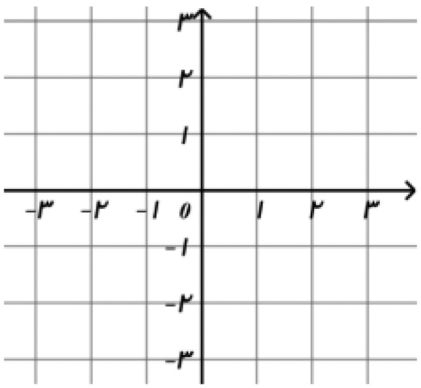
الف)

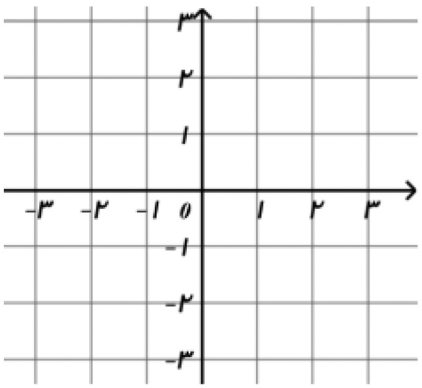
$x=-1$

$x=0$

$x=1$







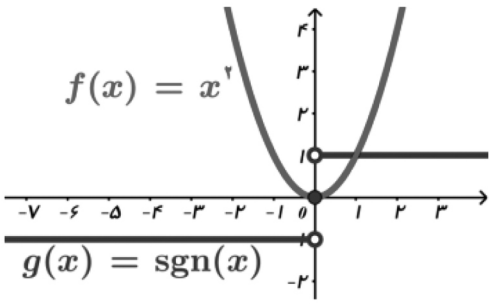
ب)

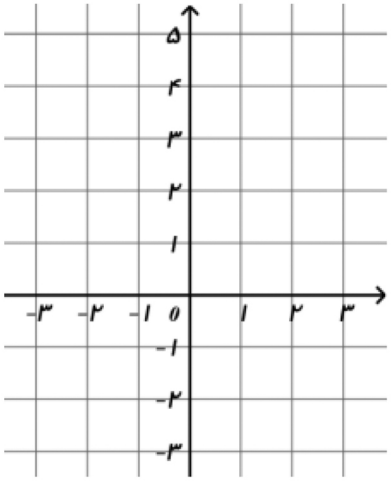
$x=-1$

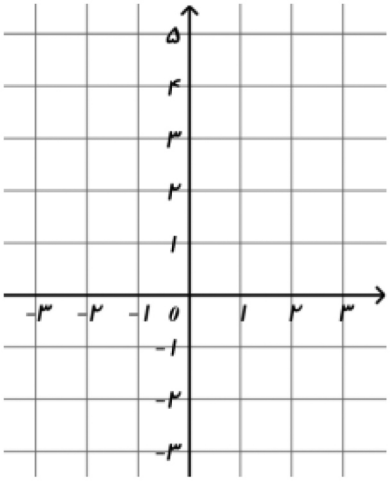
$x=0$

$x=1$

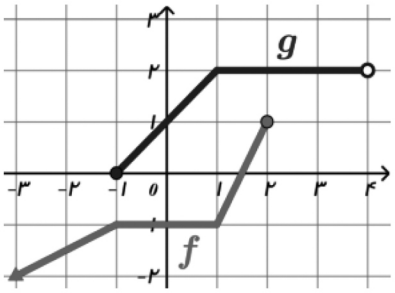
$x=2$







تمرین ۳۷: نمودار دو تابع f و g داده‌شده است.



الف) مقادیر زیر را به دست آورید.

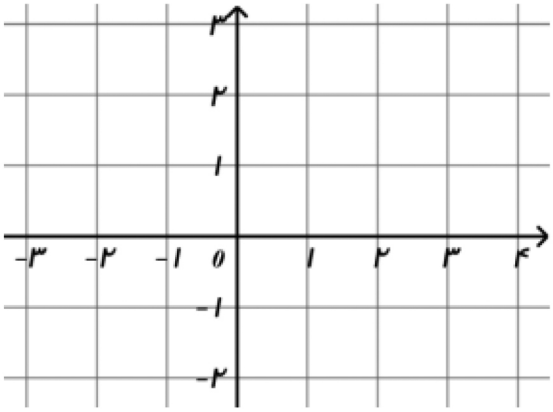
$(f+g)(۱)$

$(f+g)(-۱)$

$(f+g)(۲)$

$(f+g)(۰)$

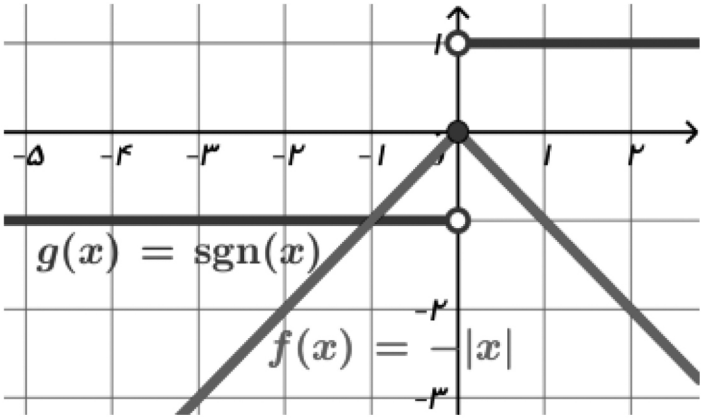
ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

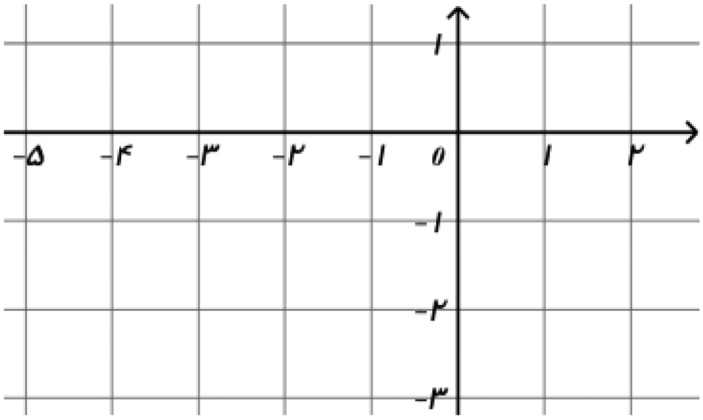


پ) ضابطه توابع f ،g و $f+g$ را به دست آورید.

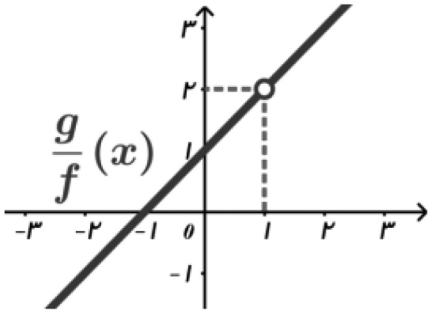
تمرین ۳۸: به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا در نقاط داده‌شده مشخص کنید، سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.

$x=-۲$ $x=-۱$ $x=۰$ $x=۱$ $x=۲$





تمرین ۳۹: اگر $g(x)=x^{۲}-۱$ و نمودار تابع $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ به‌صورت زیر باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست آورید.



تمرین ۴۰: اگر $g(x)=x+3$ **و** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x-3$ **تابع باشد، ضابطه تابع** $f(x)$ **را به دست آورید.**

تمرین ۴۱: اگر $f(x)=x^2-1$ **و** $(f+g)(x)=3x^2-5x+7$ **تابع باشد. ضابطه تابع** $g(x)$ **را به دست آورید.**

تمرین ۴۲: اگر توابع $f(x)=1-2x$ **و** $g(x)=x^2-4x+7$ **باشند. مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.**

الف) $(f+g)(x)-(f-g)(x)=$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3)-(f\times g)(2)=$

تمرین ۴۳: اگر توابع $g(x)=\begin{cases}-2 & x\geq 2\\ x & 0\leq x<2\\ -5 & x<0\end{cases}$ **و** $f(x)=3x+1$ **باشند. مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.**

الف) $(f+g)(3)+(f-g)(-2)-\left(\frac{f}{g}\right)(1)=$

ب) $(f\times g)(-4)+(f+g)(7)$

تمرین ۴۴: اگر توابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x\geq ۰\\ x+۱ & x<۰\end{cases}$ **و** $g(x)=\begin{cases}x-۱ & x\geq ۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$ **باشند. مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.**

الف) $f(-۲)\times(g)(۰)=$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(۳)=$

تمرین ۴۵: یک مجتمع صنعتی دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه A به ترتیب $R_۱(x)=۱۰x$ **و** $C_۱(x)=x^۲+۲x-۳۰$ **باشند و در کارخانه B به ترتیب** $R_۲(x)=۱۵x-x^۲$ **و** $C_۲(x)=۳x+۱۶$ **واحد باشد.**

الف) تابع سود مجتمع صنعتی را به دست آورید.

ب) این مجتمع صنعتی با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟