

ریاضی و آمار 3

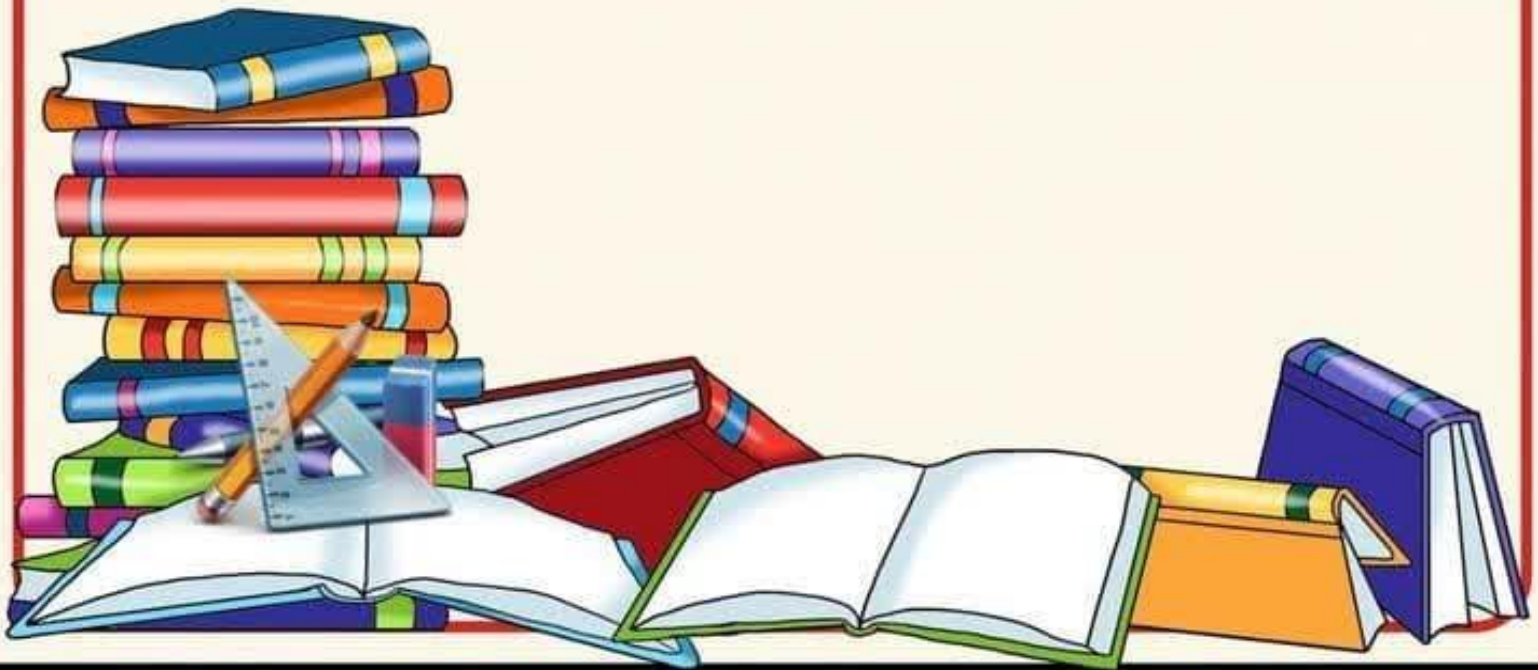
ویژه رشته انسانی



میراث: استاد مفتح



- ☒ ریاضیات جامع دکتر انصاری
- ☒ حرمی ناما
- ☒ مثال ریاضی فشریحی



$m \times n$

فضل اول ریاضی (دوازدهم) ← اصل ضرب (شمارش) ← اتحالی و مطریق - ۴ المطایق ←

$$\vec{u} \leftarrow + \leftarrow \vec{v}$$

و ← x ← اصل ضرب

$$V \times E = 12$$

مسئله ← سیراز $\oplus$ افغان $\oplus$ تهران

اصل جمع : $m+n$ على اقل ≥ 2

مسئله: مسافری قوه‌ها از تهران به اراک و سفر کند و بخواهد که ۲۰٪ از قیمت بپردازد. اگر از تهران تا قم ۳ راه و از قم تا اراک ۲ راه وجود داشته باشد.

(ج) مسافر پہنچو توں مسافروں آندو ویرگت اناں (۱۲) دھونیاں مہرھا
رفت ویرگت تلسیان نیاسیہ.

$$\mu_X^c = 19$$

الف / مسافر میزد طریق از تهران به اراک مسافر طی کند.

(ب) مصداق قرآن، فید طریق مصداق قرآن و بر گشت انجام می دهد^۸

$$\textcircled{+} \text{W} \leftarrow 1P + 1P = 2P$$

⑩ $12 \times 2 = 24$
چندگرت

$\begin{matrix} \text{قرآن} & - & \text{م} & - & \text{ارال} \\ \text{قرآن} & - & \text{م} & - & \text{ارال} \end{matrix}$

$$w_0! = w \times |x| = 9$$
$$r! = r \times (r-1) \times (r-2) \times \dots \times 1 = r \times (r-1) \times (r-2) \times \dots \times 1$$
$$\omega' = \omega \times E \times \mu \times \mu \times 1 = \mu.$$
$$|1\rangle = |x\rangle \otimes |e\rangle \otimes |y\rangle \otimes |1\rangle = |yy\rangle$$
$$YI = YXI = Y$$

11-1

3

ناتوانی: ! ← شاملترین هر عدد از خودش تا !

نیلہ ← اعداد منفی! ڈارڈ

سؤال: حاصل التفاضل

$$\frac{w!}{d!} = \frac{\cancel{w!}}{d \times \cancel{d} \times \cancel{w!}} = \frac{1}{d}$$
$$\frac{\begin{smallmatrix} K \\ \diagup \\ \textcircled{1} \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} \textcircled{1} \\ \diagdown \\ W \end{smallmatrix}} + \frac{\begin{smallmatrix} P \\ \diagup \\ \textcircled{1} \end{smallmatrix}}{\begin{smallmatrix} \textcircled{1} \\ \diagdown \\ W \end{smallmatrix}} = K + P = G$$
$$X \begin{pmatrix} \psi \\ \epsilon \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \psi \\ \epsilon \end{pmatrix}$$
$$(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$
$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \times \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1$$

! درجہ کی تعلیم حاصل کرنا

d! $\frac{\omega \times \cancel{e} \times \cancel{x} \times \cancel{x} \times \cancel{x}}{\cancel{w} \times \cancel{y} \times \cancel{x} \times \cancel{y}} = 7$

$\frac{140}{7} = 20$

$$\frac{|Y| + |W| - |Y \cap W|}{n} = \frac{10 + 10 - 4}{20} = \frac{16}{20} = 0.8$$

$\sqrt{1} \quad \sqrt{1} \quad \sqrt{1} \quad \sqrt{1} \quad \sqrt{1}$

$$1 - 1 = 0 = 1 - 1 = 0$$
$$(3!) = 6$$
$$\frac{E!}{\cancel{N!}} = \frac{E \times \cancel{N!}}{\cancel{N!}} = E$$

* $\omega! \times \gamma! = 14 \times 2 = 28$

$$\star 3 |xy| = 6 \times 2 = 12$$
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$
$$(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \quad \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$
$$140 \quad 2$$

$$(2!) + (2!) \neq 2!$$
$$d(x, y) \neq 1.1 \quad (d!)^1 \neq p d!$$

λ | γ | $\perp$ | w |

$\omega_1, \dots, \omega_n$



اصل جمع

$$+ = - = \text{اصل مع}$$

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد ، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد ، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد. توجه کنید که نهایتا قرار است کار فقط با یکی از شیوه ها انجام شود.

در اصل مع انتخاب یکی از آنها داریم

مثال: امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا ، شیرینی بدهد . او با خود فکر میکند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران ((یا)) آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود ، تنها یکی از 2 نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه ی هویج ، سیب و پرتقال را می توان انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

$$2 + 3 = 5$$

اصل ضرب

$$= \text{اصل ضرب به هم رس}$$

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله ی اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش ، مرحله ی دوم را بتوان به n روش انجام داد ، در کل مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است. توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد.

مثال: هفته ی بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند ، اما او می خواهد امین را هم به آن رستوران ((و)) هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

$$1 \times 1 = 1$$



مثال: از تهران به اصفهان 2 راه و از اصفهان به شیراز 3 راه وجود دارد. مسافری میخواهد از تهران به شیراز عبور کند به گونه ای که حتما از اصفهان عبور کند.

الف) به چند طریق این مسافرت انجام میشود؟

$$2 \times 3 = 6$$

مرحله 2 مرحله 1 = اصل $\times$

$$9 + 9 = 18$$

$$9 \times 2 = 18$$

ب) به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام میشود؟

رفت و برگشت
اصل $\times$ برگشت

ج) به چند طریق مسافرت رفت و برگشت انجام میشود به گونه ای که مسیرهای رفت و برگشت یکی باشد؟

$$7 \oplus 1 = 8$$

رفت $\rightarrow 2 \times 3 = 6$ $\Rightarrow$ مسیر رفت
برگشت $\rightarrow 1 \times 1 = 1$ $\Rightarrow$ مسیر برگشت



اگر چند شیئ متمایز داشته باشیم ، به هر حالت چیدن آنها کنار هم ، یک **جایگشت** از آن اشیا می گوئیم.

جایگشت به ترتیب و نحوه قرار گرفتن اشیاء را می گویند.
جایگشت ۱ می باشد. ۲ می باشد. ۳ می باشد. ۴ می باشد. ۵ می باشد. ۶ می باشد. ۷ می باشد. ۸ می باشد. ۹ می باشد. ۱۰ می باشد.

مثال: با ارقام 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 بدون تکرار ارقام

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{6}{\text{صدگان}} = 150$$

ب) چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{صدگان}} = 25$$

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{صدگان}} = 50$$

ج) چند عدد سه رقمی مضرب 5 می توان ساخت؟

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{1}{\text{صدگان}} = 25$$

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{صدگان}} = 50$$

د) چند عدد سه رقمی فرد می توان ساخت؟

$$\frac{5}{\text{یکان}} \times \frac{5}{\text{دهگان}} \times \frac{3}{\text{صدگان}} = 75$$

مثال: در یک کشور نوعی اتومبیل در 5 مدل ، 10 رنگ ، 3 حجم موتور مختلف و 2 نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.



الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد ، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

مثال: یک آزمون چند گزینه ای شامل 10 سوال 4 گزینه ای و 5 سوال 2 گزینه ای است. فردی قصد دارد به سوال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار انجام دهد اگر: الف) اگر مجبور باشد به همه ی سوال ها جواب دهد؟

ب) بتواند سوال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$$

اگر n یک عدد طبیعی باشد ، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از 1 تا n را بصورت $n!$

نمایش می دهیم. (قرار داد $0! = 1$) **مثال:** حاصل عبارت های فاکتوریل دار را بصورت ساده و حاصل ضرب ها زیر را با نماد فاکتوریل بدست آورید.

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)$$

مثال: 3 کتاب ریاضی متفاوت و 4 کتاب فیزیک متفاوت را به چند حالت می توان چید به طوری که :

الف) هیچ شرطی به میان نباشد.

$$3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$$





حالت کتابخانه ✓ ✓ ✓ ✓

ب) کتاب های ریاضی کنار هم باشند؟

$$5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

حالت کتابخانه ✓ ✓ ✓

ج) کتاب های فیزیک کنار هم باشند؟

$$4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$$

حالت کتابخانه

د) کتاب های فیزیک کنار هم و کتاب های ریاضی کنار هم باشند؟

$$2! \times 4! \times 3! = 2 \times 24 \times 6 = 288$$

ه) کتاب ها یک در میان باشند؟

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

$$\frac{2}{\text{ریاضی}} \times \frac{5}{\text{ریاضی}} \times \frac{4}{\text{ریاضی}} \times \frac{3}{\text{ریاضی}} \times \frac{2}{\text{ریاضی}} \times \frac{1}{\text{ریاضی}} \times \frac{3}{\text{ریاضی}} = 720$$

$$4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2880$$

مثال: 4 کتاب ریاضی متفاوت و 4 کتاب فیزیک متفاوت را به چند طریق می توان یک در میان کنار هم قرار داد؟

$$4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$$

مثال: با ارقام 0 و 1 و 2 و 3 و 4 و 5 چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟

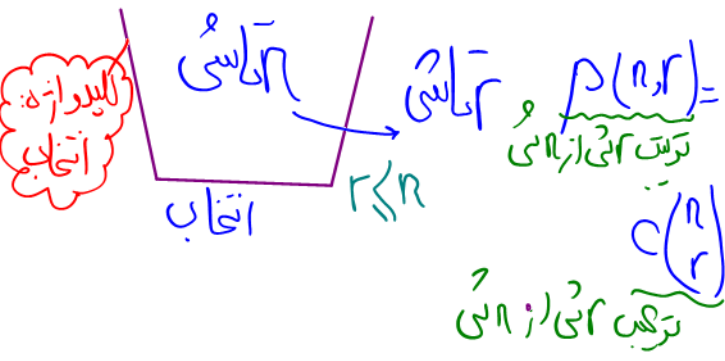
$$\frac{5}{\neq} \times \frac{4}{\neq} \times \frac{4}{\neq} = 180$$

$$\frac{5}{\neq} \times \frac{5}{\neq} \times \frac{4}{\text{یکبار}} = 100$$



ترتیب و ترکیب: (۱) ترتیب در انتخاب مهم است. ترتیب: P
 اعداد و ارقام / حرف و بیانات / چراغ های مختلف

(۲) ترتیب در انتخاب مهم نیست: ترکیب: C
 آنهایی که به هم از یک مجموعه / چراغ های مختلف



$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترتیب از n

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

ترتیب از n-1

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

$$P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4!$$

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$$

$$C(4, 3) = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

لست از یک مجموعه $P(n, r) = 12$ مقدار n کدام است؟

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-(n-2))!} = \frac{n!}{(n-n+2)!} = \frac{n!}{2!} = 12 \rightarrow n! = 12 \times 2 = 24 \rightarrow n = 4$$

$$C(4, 1) \rightarrow C(n, 1) = n$$

$$C(4, 4) \rightarrow C(n, n) = 1$$

$$C(4, 3) \rightarrow C(n, n-1) = n$$

$$C(n, 0) = 1$$

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$$

$$C(4, 3) = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1} = 4$$

$$\frac{4 \times 5}{1 \times 1} = 10 \rightarrow \frac{4 \times 5 \times 3!}{1 \times 3!} = 10$$

حداقل ← لا اقل ← اقلا ← دست کم
 حداکثر ← دست زیاد

$X \leftarrow 9$
 $+ \leftarrow 2$

$$C(7, 4) = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 35$$

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 2!} = 10$$

لست از ۱۰ کتاب ادبی و ۸ کتاب علوم چند دسته های متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می توان انتخاب کرد؟

$$\binom{10}{2} \times \binom{8}{3} = \frac{10 \times 9}{1 \times 2} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 45 \times 8 = 360$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

لست از ۲ روسی و ۱۰ کتاب ادبی و ۸ کتاب علوم چند دسته های متشکل از ۲ روسی و ۳ کتاب ادبی و ۳ کتاب علوم می توان تشکیل داد؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

درجه‌ای ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی وجود دارد. می‌خواهیم ۳ مهره به تصاف از جیب خارج کنیم. به چند طریق این کار را می‌توانیم انجام دهیم

الف) هر سه مهره قرمز باشد: هر ۳ آبی یا هر سه قرمز $\frac{3 \times 4}{1 \times 4} = 3$

ب) ۱ مهره قرمز و ۲ مهره آبی باشد: $\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 14$

ج) حداقل ۲ مهره آبی باشد: $\binom{4}{3} \times \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 50$

و) حداکثر ۲ مهره آبی باشد: $\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{5}{0} = 14$

۴ مهره قرمز
۵ مهره آبی

$n=9$
 $r=3$

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84$$

خ) ابتدا ۲ مهره قرمز باشد: $\frac{3 \times 4}{1 \times 4} = 3$

۲ قرمز و ۱ آبی یا ۳ قرمز، ۰ آبی

$\binom{5}{3} \times \binom{4}{0} + \binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 34$

$1 \times 4 + 5 \times 7 = 39$

مثال ۴ درجه‌ای ۲ مهره سفید - ۱ مهره بنفش و ۳ مهره آبی وجود دارد. به تعداد ۳ مهره از گنج خارج می‌کنیم. به چند طریق این اتفاق می‌افتد

۳ مهره سفید
۴ " بنفش
۳ آبی

$$n=10 \rightarrow \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

۱: ۱
۰: ۰

$$\frac{2 \times 7}{1 \times 4} = 14$$

$$\frac{4 \times 5 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

$$\binom{4}{3} \times \binom{6}{0} + \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 15$$

$$4 \times 15 + 1 \times 35 = 70 + 20 = 90$$

الف) هر سه مهره قرمز باشد: $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 1 + 4 + 1 = 6$

یا هر ۳ سفید یا هر ۲ بنفش و ۱ قرمز

$\frac{3 \times 4}{1 \times 4} = 6$

ب) هر سه مهره قرمز نباشد: $\binom{3}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{5}{0} = 3 \times 4 \times 1 = 12$

سفید و ۱ بنفش و ۱ آبی

ج) ۲ مهره بنفش و ۱ مهره سفید باشد: $\binom{4}{2} \times \binom{5}{1} = 6 \times 5 = 18$

د) حداقل ۲ مهره آبی باشد: $\binom{6}{3} \times \binom{4}{0} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = 1 \times 1 + 7 \times 3 = 22$

۲ آبی و ۱ بنفش و ۱ آبی، ۲ بنفش و ۱ آبی

ه) حداکثر ۱ مهره بنفش باشد: $\binom{6}{3} \times \binom{4}{0} + \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} = 1 \times 1 + 7 \times 3 = 22$

۱ بنفش و ۲ آبی، ۲ بنفش و ۱ آبی

نکته ۴ از میان ۷ گلوله ۵ وزن بردار به چند طریق این اتفاق می‌افتد که حداقل یک تفکیک می‌گیریم

۷ گلوله
۵ وزن بردار

$$\binom{5}{3} \times \binom{7}{0} + \binom{5}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = 1 \times 35 + 5 \times 21 + 10 \times 7$$

$$35 + 105 + 70 = 210$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

۲۱۰
۳۵
۱۸۰
۲۰۰

نکته - 2^n ← تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضو

تعداد زیرمجموعه‌های m عضو یک مجموعه n عضو $\rightarrow C(n, m)$

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید. (الف) این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟
 (ب) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟ $\frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$ (ج) مجموعه چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟ $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1$
 (و) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی که شامل a باشد دارد؟ $\frac{5}{(4)} = 10$ (خ) مجموعه چند زیرمجموعه ۳ عضوی که a و d شامل e نباشد دارد؟ $\frac{5}{(3)} = 10$
 (گ) مجموعه چند زیرمجموعه ۴ عضوی که شامل e باشد و f نباشد؟ $\frac{4}{(3)} = 4$ (ز) چند زیرمجموعه ۳ عضوی که شامل e باشد و a نباشد دارد؟ $\frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1$
 تست ← یک مجموعه ۱ عضو چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟ $\frac{4}{(4)} = 1$

تعریف فضای نمونه ای: S
 تعریف رویداد تصادفی: A

احتمال ← $\frac{\text{تعداد فضای رویداد}}{\text{تعداد فضای نمونه ای}} = \frac{n(A)}{n(S)}$
 مثال: $P_A = \frac{n(A)}{n(S)}$ (A) عدد اول ← عددی که فقط بر ۱ و خودش تقسیم پذیر است
 عدد زوج ← ... بر ۲ تقسیم پذیر است
 جنسیت زن است

تعداد فضای نمونه ای $n(S)$
 تعداد فضای رویداد تصادفی $n(A)$
 $P_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
 $P_B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 $P_C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 مثال: در تپان یکس احتمال آنکه ... عدد اول باشد $P_E = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$... مربع کامل باشد $P_F = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$... مضرب ۳ باشد $P_G = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مثال: در تپان توپس احتمال آنکه ... هر یک عدد ۱ تا ۳ زوج باشد $P_A = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
 ... هر ۲ عدد ۱ تا ۳ مضرب ۳ باشد $P_B = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
 ... هر دو عدد ۱ تا ۳ جمع دو عدد ۱ تا ۳ باشد $P_C = \frac{5}{36}$
 $P_D = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
 $P_E = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

مثال ← در یکسای ۵ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۳ مهره سفید از یک جعبه داریم. (الف) هر سه مهره سفید باشند: یا هر ۳ قرمز یا هر ۲ آبی و ۱ سفید یا هر ۱ آبی و ۱ قرمز و ۱ سفید
 (ب) حداقل ۱ مهره آبی باشد
 (ج) احتمال ۱ مهره قرمز باشد ۲ مهره آبی یا ۳ مهره سفید
 $P_A = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$
 $P_B = \frac{74}{84}$
 $P_C = \frac{5}{84}$

کوشنزارا احوال
انجمن آندلس

مکتوب از ۵۹ تا ۱۱۵۲
.. احوال ۱۱۴ تا ۱۱۵۵
احوال ۱۱۶۱ تا ۱۱۷۰



ذرتب و ذرتب

ذرتب:

تعداد جایگشت های r تایی از n شی متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب های r شی از بین n سی متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد ، با $p(n, r)$ نمایش میدهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می شود.

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با حروف کلمه ((جهانگردی)) و بدون تکرار حروف:
الف) چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت ؟ چندتا از آنها به ((ی)) ختم می شوند؟

ب) چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت که در آنها حروف ((د)) و ((ی)) کنارهم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه 6 حرفی می توان نوشت ؟ چندتا از آنها به ((گردی)) ختم می شود؟

ت) چند کلمه 8 حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ((جهان)) چهار حرف اول باشند؟





مثال: با حروف کلمه ((گل پیرا)) و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ی 6 حرفی می توان نوشت؟ چندتا از آنها با ((گل)) شروع می شود؟

ب) چند کلمه 4 حرفی می توان نوشت؟

ج) چند کلمه 4 حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف ((پ)) و ((ر)) در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه 5 حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ((پیرا)) کنار هم آمده باشند؟

ترکیب:

به هر انتخاب r شی از n شی متمایز که آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شی می گوییم. تعداد ترکیب های r تایی

از n شی متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و داریم:

مثال: الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

مثال: در یک دوره مسابقات کشتی از بین 4 داور ایرانی، 3 داور ژاپنی و 2 داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته 4 نفره باشد؟

ب) کمیته 3 نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

ج) کمیته 5 نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

د) کمیته 5 نفره باشد و حداقل 3 داور ایرانی داشته باشد؟





ه) کمیته 7 نفره باشد و شامل 3 داور ایرانی، 2 داور ژاپنی، 2 داور روسی باشد؟

پ) کمیته 5 نفره باشد حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

مثال: از کیسه ای که شامل 3 مهره آبی، 4 مهره قرمز، 5 مهره سبز است می خواهیم 3 مهره انتخاب کنیم بطوری که
الف) هیچ محدودیتی به میان نباشد؟

ب) 2 مهره قرمز و 1 مهره سبز باشد؟

ج) مهره ها هم رنگ باشند؟

د) مهره ها هم رنگ نباشند؟

ک) حداقل 1 مهره سبز باشد؟

گ) حداکثر 2 مهره قرمز باشد؟

مثال: مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

الف) چند زیر مجموعه دارد؟

ب) چند زیر مجموعه 3 عضوی دارد؟



ج) چند زیر مجموعه 4 عضوی شامل عضو a وجود دارد؟

د) چند زیر مجموعه 4 عضوی شامل a, b و فاقد e وجود دارد؟

مثال:

مجموعه شامل همه ی این حالت های ممکن ، فضای نمونه ای نامیده می شود. اگر این مجموعه را با S بنامیم ، هر زیر مجموعه مانند S مانند A را یک پیشامد تصادفی در S می نامیم.
مثال: خانواده ای دارای 3 فرزند است احتمال آن را بدست آورید که :

الف) دقیقاً یک دختر در این خانواده متولد شده باشد؟

ب) حداکثر یک دختر در خانواده متولد شده باشد؟

ج) تعداد فرزندان پسر و دختر برابر باشند ؟

د) تعداد فرزندان پسر از دختر بیشتر باشد؟

مثال: در جعبه ای 3 مهره ی قرمز و 2 مهره ی آبی قرار دارد. اگر 3 مهره به تصادف از این جعبه خارج کنیم احتمال آن را بدست آورید که :

الف) حداقل یک مهره آبی انتخاب شود ؟

ب) حداکثر یک مهره آبی انتخاب شود؟



(ج) هر سه مهره قرمز انتخاب شود؟

پیشامدهای رخ می‌آید:

اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه ای S باشند ، در این صورت :
(الف) اجتماع دو پیشامد : زمانی رخ میدهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد.

(ب) اشتراک دو مجموعه : زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد باهم اتفاق بیفتد .

(ج) تفاضل دو پیشامد: زمانی رخ میدهد که A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

(د) متمم یک پیشامد: اگر A یک پیشامد از فضای نمونه ای S باشد ، متمم پیشامد A که با $\bar{A}$ نمایش داده می شود، وقتی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامد ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و B را دو **پیشامد ناسازگار** می نامیم . در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم اتفاق نمی افتند.



مثال: دو تاس را با هم پرتاب میکنیم احتمال آن را بیابید که:

الف) هر دو تاس فرد و مجموع آنها 6 باشد؟

ب) هر دو تاس فرد یا مجموع دو تاس 6 باشد؟

ج) هر دو عدد تاس یکسان باشد؟

و) عدد دوم از عدد اول بزرگتر باشد؟

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ، همواره تساوی زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مقدمه بر علم آمار

آمار ، مجموعه ای از اعداد ، ارقام و اطلاعات است. علم آمار مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام ، سازماندهی و نمایش ، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری ، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

تعریف جامعه یا جامعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد ، جامعه یا جمعیت نامیده می شود و در هر یک از این افراد یا اشیا را عضو جامعه می نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه ی جامعه یا حجم جامعه گویند.

تعریف نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب شود ، نمونه گویند و در هر یک از افراد یا اشیا



انتخاب شده را عضو نمونه گویند. که به تعداد اعضای آن، اندازه ی نمونه یا حجم نمونه گویند.
تعریف متغیر کمی: متغیر هایی را که قابل اندازه گیری هستند، متغیر های کمی گویند. (پیوسته و گسسته)

تعریف متغیر کیفی: متغیر هایی که قابل اندازه گیری نیستند، متغیر های کیفی گویند. (ترتیبی، اسمی)
مثال: انواع متغیر های زیر را مشخص کنید.

الف) سن:

ب) نمره ریاضی نهم:

ج) جنسیت:

د) قد و وزن:

ه) میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)



وقتی می خواهیم درباره ی موضوعی تحقیق کنیم نیاز به اطلاعاتی داریم که به آن داده می گویند. داده ها به صورت ارقام یا کلمات توصیفی هستند پس از به دست آوردن اطلاعات و جدول بندب و تحلیل و تفسیر باید نتیجه گیری کنیم. آمار مجموعه ای از اعداد و ارقام است.

علم آمار: مجموعه روش هایی که شامل:

- 1) جمع آوری اطلاعات
- 2) سازمان دهی
- 3) تحلیل و تفسیر
- 4) نتیجه گیری
- 5) قضاوت و پیش بینی مناسب

جامعه: به مجموعه ی تمام افرادی که تحقیق راجع به آن ها صورت می گیرد جامعه گویند. تعداد اعضای جامعه را اندازه یا حجم جامعه گویند.



مثال: وقتی در مورد نمرات ریاضی کلاس دهم مدرسه صحبت می شود جامعه ی آماری کلاس دهم مدرسه و اندازه و حجم آن دانش آموزان کلاس است.

نمونه: هرگاه اندازه ی جامعه به قدری بزرگ باشد که نتوان کل جامعه را بررسی کرد در این صورت قسمتی از جامعه را انتخاب که به آن نمونه گویند و همه ی ویژگی های جامعه را دارد.

سرشماری: اگر مطالعه ی جامعه به گونه ای باشد که کل جامعه بررسی شود به این حالت سرشماری گویند.

متغیر: یک شاخصه و ویژگی از همه ی اعضای جامعه یکسان نیست و از عضو به عضو دیگر تغییر می کند و عددی که به این ویژگی اختصاص می یابد مقدار متغیر است.

متغیر ها بر دو نوع هستند. الف) کمی ب) کیفی

متغیرهای کمی: متغیرها و ویژگی هایی که قابل اندازه گیری هستند.

متغیرهای کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری نیستند.

متغیرهای کمی 2 نوع است:

کمی گسسته: متغیرهایی که مقدار به خود می گیرند تعداد کارمندان

کمی پیوسته: متغیرهایی که در یک بازه بین 2 عدد تا قرار دارند قد دانش آموزان

متغیرهای کیفی 2 نوع است:

کیفی ترتیبی: متغیرهایی که دارای مرحله و ترتیب است تحصیلات دانشگاهی

کیفی اسمی: که قابل اندازه گیری نباشد و ترتیب نداشته باشد جنسیت زن و مرد

مثال: نوع متغیرهای زیر را معلوم کنید.

(1) نوع آلودگی هوا

(2) فاصله

(3) مقام های ورزشکار

(4) سال تولید خودرو



الگوی خطی

الگوهایی که در آنها اختلاف هر دو جمله ی متوالی عددی ثابت باشد را **الگوی خطی** می نامند. دلیل نام گذاری این الگوها این است که مختصات تمام نقاط این الگو در معادله خط گفته شده ، صدق می کند. به طور کلی الگوهایی که جمله عمومی آنها بصورت $t_n = an + b$ می باشد را الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

نکته: میزان تغییر جملات متوالی این الگو برابر با ضریب n می باشد.

مثال: C_n جمله عمومی یک الگوی خطی است که در آن $C_4 = 17$ و $C_{10} = 41$ در این صورت حاصل C_n را مشخص کنید؟



الگوهای عددی که در آن تعدادی عدد پشت سرهم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم. این اعداد ، جملات دنباله نامیده می شوند.



مثال: در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید؟

الف) $1, -2, -3, -4, \dots$

ب) $5, 18, 31, 44, \dots$

پ) $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$

ت) $-2, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

د) $1, 2, 4, 7, \dots$

ج) $0.1, 0.01, 0.001, \dots$

ف) $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

ه) $-1, 8, 27, -64, 125, \dots$

دنباله ی حسابی :

دنباله ای از اعداد که اختلاف بین هر دو عدد آن ، مقدار ثابتی به نام قدر نسبت (d) است را دنباله ی حسابی می نامیم .

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots \rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)d$$

جمله عمومی

**چند مثال مهم:****مثال:** جمله ی دهم از دنباله ی حسابی و 3 و 0 و 3- را بدست آورید .**مثال:** دنباله ی حسابی 279 و... و 7 و 3 و 1- را در نظر بگیرید .

الف : این دنباله چند جمله دارد ؟

ب : عدد 51 جمله ی چندم این دنباله است ؟

مثال : در دنباله ی حسابی ... و 100- و 103- چند جمله ی کوچکتر از 5 وجود دارد ؟

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

اگر a_m, a_n دو جمله ی غیر متوالی از یک دنباله باشند داریم :

اگر سه عدد a, b, c و جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند ، در این صورت $2b = a + c$ را واسطه حسابی a و c می گوئیم .

مثال: بین 20 و 80 دو واسطه حسابی درج کنید؟

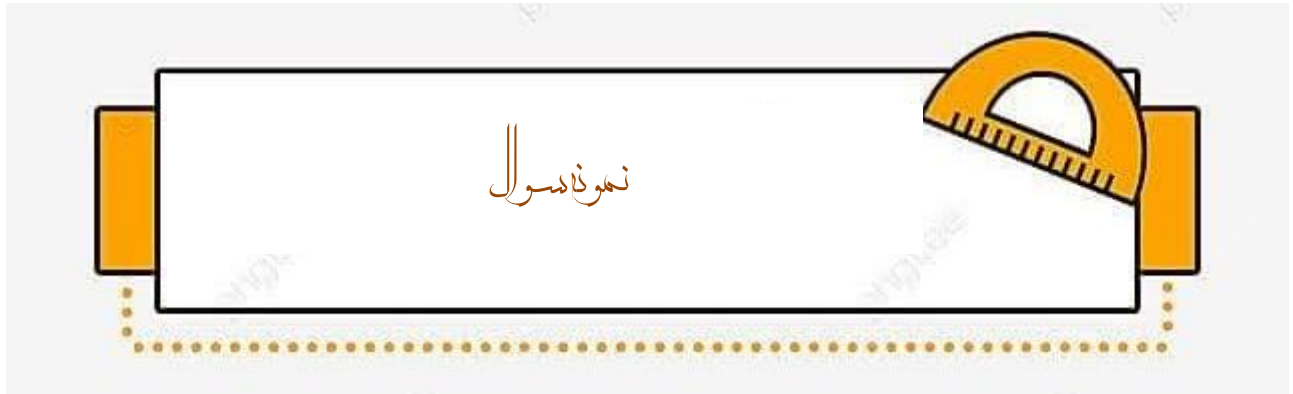


مثال: در یک تصاعد عددی $a_7 = 20$ ، حاصل $a_7 + q_{11} + a_6 + a_8$ چقدر است؟

مثال: در یک دنباله عددی، مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر 12 و مجموع جملات هفتم، هشتم، نهم برابر 48 است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

مثال: اگر به قدر نسبت یک دنباله ی حسابی 4 واحد اضافه کرده و از جمله ی اول آن 3 واحد کم کنیم، جمله بیستم آن چه تغییری نسبت به قبل می کند؟

مثال: در یک تصاعد حسابی، مجموع پنج جمله ی اول تصاعد برابر 5 و مجموع 5 جمله ی دوم تصاعد برابر 20 است. قدر نسبت این تصاعد از جمله ی اول چقدر بیشتر است؟



۱

با ارقام ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی می توان ساخت که در آن ها هم رقم زوج و هم رقم فرد وجود داشته باشد؟

252

4

219

3

203

2

156

1

۲

از بین ۳ دانش آموز سال دهم و ۴ دانش آموز سال یازدهم، ۴ نفر انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداقل ۲ دانش آموز سال دهم وجود داشته باشد کدام است؟

$\frac{45}{70}$

4

$\frac{43}{70}$

3

$\frac{23}{35}$

2

$\frac{22}{35}$

1



مجموع ۲۰ عدد طبیعی فرد متوالی و مضرب ۵ که کوچکترین آنها ۱۱۵ است، کدام است؟

۳

2400

4

400

3

4200

2

3250

1

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «system» به‌طوری‌که حروف s کنار هم نباشند، کدام است؟

۴

360

4

240

3

180

2

120

1

۵

درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی قرمز، ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی آبی قرار دارد. اگر ۲ مهره باهم از ظرف بیرون آوریم، با

کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$\frac{47}{66}$

4

$\frac{43}{66}$

3

$\frac{17}{33}$

2

$\frac{13}{22}$

1



در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جمالت متوالی،

کدام است؟

- 3 2/5 2 1/5



جواب معادله $\frac{2}{35} = \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$ کدام است؟

- 8 7 6 5



مجموع ۳ جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۱۸ و حاصل ضرب آنها ۱۹۲ است. اگر دنباله صعودی باشد،

جمله کوچکتر کدام است؟

- 2 4 6 8



اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد، مساحت آن کدام است؟

28

4

24

3

16

2

12

1



درون جعبه‌ای ۷ کارت با شماره‌های ۱ تا ۷ قرار دارد. ۳ کارت به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال شماره‌ی

این سه کارت متوالی است؟

 $\frac{1}{7}$

4

 $\frac{1}{6}$

3

 $\frac{1}{5}$

2

 $\frac{1}{4}$

1



در یک رأی‌گیری که شامل ۴ رأی موافق، ۳ رأی مخالف و ۲ رأی ممتنع است، اگر ۳ رأی به تصادف خوانده

شود، با کدام احتمال حداقل ۲ رأی موافق در بین آن‌ها وجود دارد؟

 $\frac{19}{52}$

4

 $\frac{11}{52}$

3

 $\frac{17}{42}$

2

 $\frac{13}{42}$

1





۱۲

از بین اعداد فرد طبیعی کوچکتر از ۲۰، عددی به تصادف انتخاب شده است و پیشامدهای A و B چنین تعریف

می‌شوند: عدد، مربع کامل است B = عدد، مضرب ۳ است A = احتمال آنکه پیشامد رخ دهد کدام است؟

0/5

4

0/4

3

0/3

2

0/2

1

۱۳

جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = n^2 - (n+1)^2$ است. مجموع ده جمله‌ی نخست این دنباله کدام است؟

-120

4

120

3

-60

2

60

1

۱۴

با حروف کلمه "ELECTION" چند کلمه رمز ۴ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف باشد؟

360

4

180

3

120

2

90

1





به چند روش ممکن است از بین ۱۵ دانش‌آموز، ۳ نفر آن‌ها را برای مسئول کتابخانه، مسئول گروه سرود و

۱۵

مسئول گروه تناتر دانش‌آموزان انتخاب کرد؟

2730

4

1365

3

910

2

455

1

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای حسابی باشد، آنگاه حاصل $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$ کدام است؟

۱۶

 $\frac{2n}{a_1a_n}$

4

 $\frac{2n-2}{a_1a_n}$

3

 $\frac{n}{a_1a_n}$

2

 $\frac{a-1}{a_1a_n}$

1

از کیسه‌ای محتوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه حداقل یکی از مهره‌ها

۱۷

سفید باشد، کدام است؟

 $\frac{6}{7}$

4

 $\frac{1}{7}$

3

 $\frac{5}{7}$

2

 $\frac{4}{7}$

1





از بین ۱۲ خانواده انجمن اولیاء مدرسه به چند طریق می‌توان ۴ خانواده انتخاب کرد که در آن‌ها زن یا شوهر

شرکت کنند؟

990

4

840

3

720

2

495

1



با جایگشت ارقام چند عدد پنج‌رقمی زوج حاصل می‌شود؟

120

4

104

3

96

2

84

1



از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی، به چند حالت ۳ عدد را می‌توان انتخاب کرد به‌طوری‌که تشکیل یک دنباله‌ای

حسابی دهند؟

24

4

20

3

16

2

12

1





۲۱

با ارقام طبیعی ۱، ۲، ... و ۹ چند عدد پنج رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت به طوری که ارقام ۱ و ۲ و ۳ در

آن ها حتماً با کار رفته و در کنار هم باشند؟

360

4

180

3

120

2

540

1

۲۲

اگر در یک دنباله ای حسابی $a_2 = -1$, $a_5 - a_3 = 1$ باشد، جمله ی چندم دنباله برابر صفر است؟

ششم

4

پنجم

3

چهارم

2

سوم

1

۲۳

اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، تشکیل دنباله عددی می دهند، نسبت بزرگترین ضلع مثلث به کوچک ترین ضلع آن

چه قدر است؟

 $\frac{5}{3}$

4

 $\frac{5}{4}$

3

 $\frac{4}{3}$

2

 $\frac{12}{5}$

1





بین دو عدد ۱۰ و ۱۲، نوزده واسطه حسابی درج کرده ایم جمله دهم دنباله حسابی حاصل کدام است؟

۲۴

11

4

10/9

3

10

2

9/9

1

احتمال آن که مجموع دو تاس پرتاب شده با هم کوچکتر از ۹ باشد، چه قدر است؟

۲۵

$\frac{2}{3}$

4

$\frac{13}{18}$

3

$\frac{7}{9}$

2

$\frac{5}{12}$

1

