ریاضی و آمار ۲

فصل دوم

درس ۱: توابع ثابت ، چندضابطه‌ای و همانی

درس ۲: توابع پله‌ای و قدر مطلق

درس ۳: اعمال روی توابع

ریاضی و آمار ۲

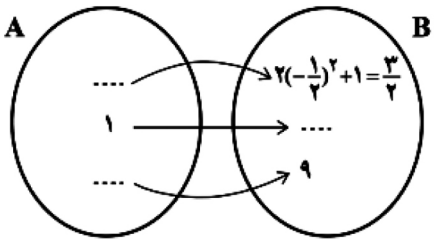
درس ۱

توابع ثابت، چندضابطه ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع ، دامنه و برد آشنا شدید.

تمرین ۱: اگر $A=\left\{-\frac{۱}{۲},۱,۲\right\}$ **و** $f(x)=\begin{cases}f:A\to B\\ f(x)=۲x^{۲}+۱\end{cases}$ **باشد، با توجه به نمایش‌های مختلف تابع قسمت‌های زیر را کامل کنید.**

الف) در نمایش پیکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A داریم:



بنابراین برد f مجموعه { , , } = B است. نمایش پیکانی رابطه فوق بیانگر یک

زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً ..... خارج شده است.

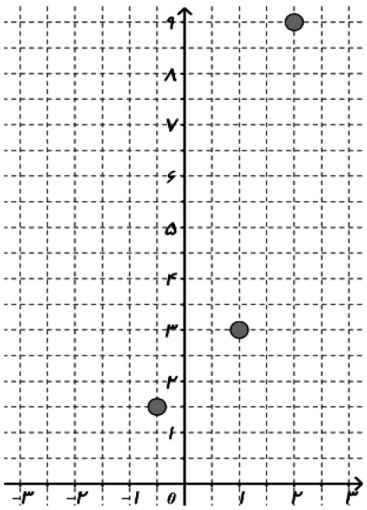
ب) نمایش زوجی مرتبی آن به‌صورت زیر است:

$$f=\left\{\left(\quad,\frac{۲}{۳}\right),(۱,\quad),(\quad,۹)\right\}$$

$$D_f=\{\quad,۱,\}\quad\text{و}\quad R_f=\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$$

مجموعه‌های D_f و R_f دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهد.

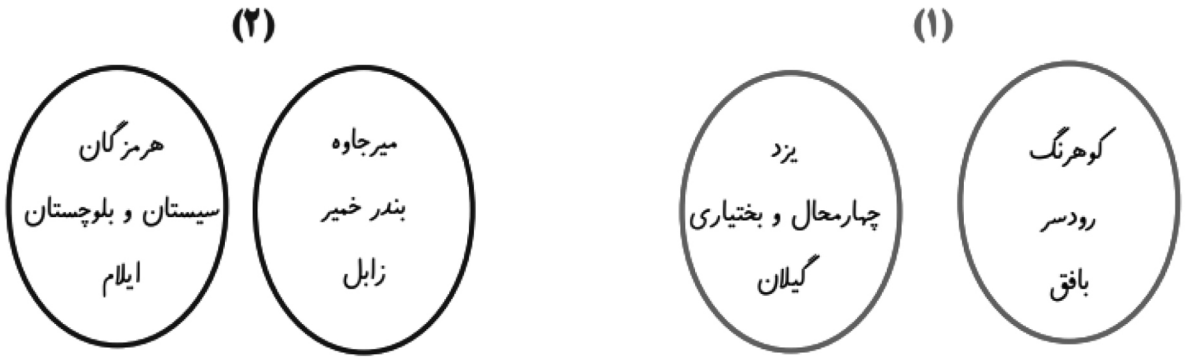
پ) نمایش مختصاتی آن نیز چنین است؛ تصویر این نقاط بر روی



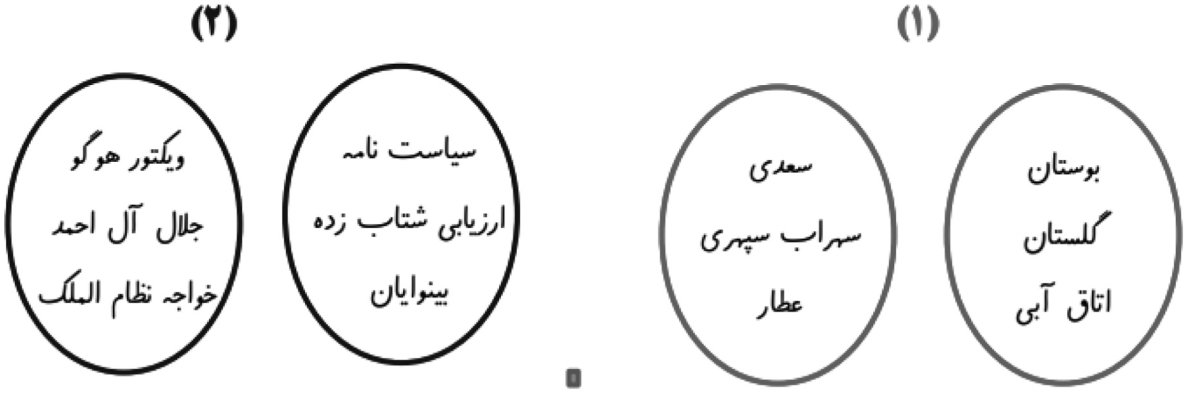
محور x ها؛ یعنی { ,۱, } دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور yها $\left\{\frac{۳}{۲},\quad,۹\right\}$ برد تابع نامیده می‌شود.

تمرین ۲ : **ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته‌شده را کامل کنید .**

الف) رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

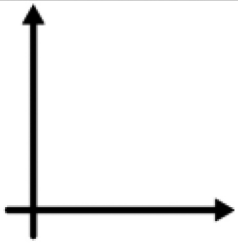


ب) رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



تمرین ۳ : **حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌های تمرین قبل که تابع هستند، کامل کنید.**

	نمایش جدولی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
الف			

ب			

با توجه به جدول بالا:

نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

انواع توابع (ثابت ، چندضابطه ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

دیران یک فروشگاه به دلایلی تصمیم گرفته‌اند هزینه استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به‌صورت هوشمند تعیین کنند.

پیش‌ازاین، هزینه استفاده از توقفگاه ثابت بوده است. (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مداربسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفته هر فصل شمارش‌شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از ۱جدول روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده‌شده است. این اطلاعات در جدول زیر نمایش داده‌شده است:

جدول ۱	ساعت اول ۸-۹	ساعت دوم ۹-۱۰	ساعت سوم ۱۰-۱۱	ساعت چهارم ۱۱-۱۲	ساعت پنجم ۱۲-۱۳	ساعت ششم ۱۳-۱۴	ساعت هفتم ۱۴-۱۵	ساعت هشتم ۱۵-۱۶	ساعت نهم ۱۶-۱۷	ساعت دهم ۱۷-۱۸	ساعت یازدهم ۱۸-۱۹	ساعت دوازدهم ۱۹-۲۰
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یکشنبه	۱۱	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنج‌شنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۴۰	۶۱۰	۷۴۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۴۰	۴۱۰

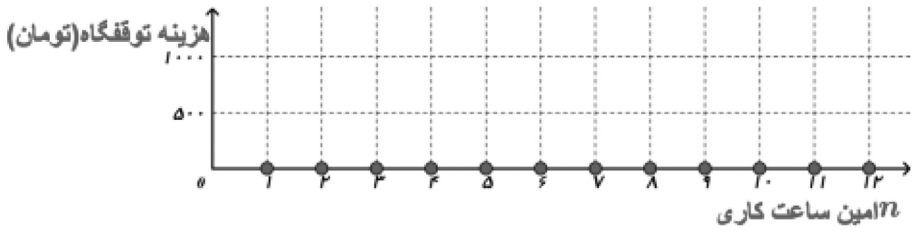
با در نظرگرفتن جدول صفحه قبل، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول زیر تعیین‌شده است:

جدول ۲

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو)تومان)
۰-۱۰۰	**رایگان**
۱۰۰-۲۰۰	**۵۰۰ تومان**
۲۰۰-۳۰۰	**۱۰۰۰ تومان**
۳۰۰-۴۰۰	**۱۵۰۰ تومان**
۴۰۰-۵۰۰	**۲۰۰۰ تومان**
۵۰۰-۶۰۰	**۲۵۰۰ تومان**
۶۰۰-۷۰۰	**۳۰۰۰ تومان**

تابع ثابت

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «n امین ساعت کاری فروشگاه – هزینه دریافتی» را برای روز شنبه در نخستین هفته هوشمند سازی رسم می‌کنیم.



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است؛ تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به‌صورت $\begin{cases} C: A \to B \\ C(n)=0 \end{cases}$ است که در آن $D_C = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le 12\}$ دامنه تابع و $R_C = \{0\}$ برد تابع **C** را تشکیل می‌دهند.

تمرین ۴: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی در جدول ۲ نمودار زیر را بـرای روز یکشـنبه کامل کنید.

تابع را که در آن مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است

تمرین ۵: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطـابق جـدول ۲ نمـودار زیـر را بـرای روز دوشنبه کامل کنید.

الف) جاهای خالی را کامل کنید.

ب) دامنه روز دوشنبه چه تفاوت‌هایی با دامنه نمودار در روز شنبه و یکشنبه دارد؟

$$\begin{cases} C : AB \\ Cx = \end{cases}$$

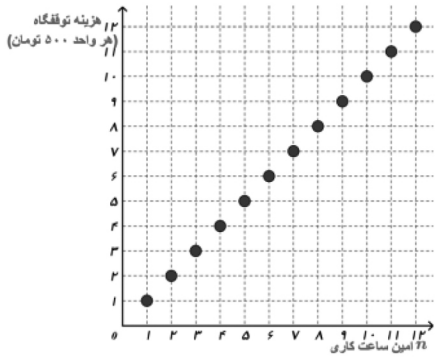
$$R_C = \{ \quad \}$$

$$D_C \{ x \in \mathbb{R} | \quad \}$$

پ) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

تابع همانی

تمرین ۱۴: برای روز پنج‌شنبه به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی n واحد هر واحد ۵۰۰ تومان باشد بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:

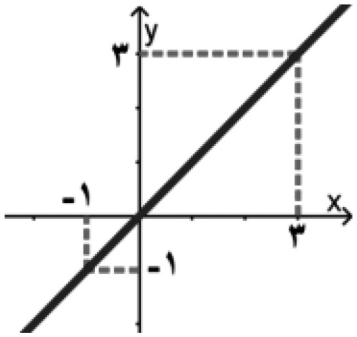


الف) مجموعه نقاط نمودار را به‌صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان‌دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟

ب) اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالـت دامنـه و برد آنچه تغییری می‌کند؟

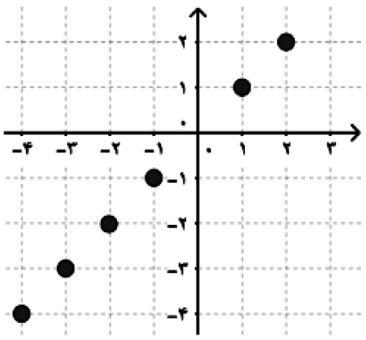
تابع با ضابطهٔ $f(x)=x$ را تابع همانی می نامند. با توجه به ضابطهٔ تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. $R_f = \mathbb{R} \, . \, D_f = \mathbb{R}$

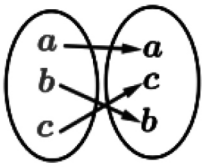
ازلحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.



تمرین ۱۵ : **نمونه‌هایی از توابع همانی در اینجا ارائه‌شده‌اند، دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.**

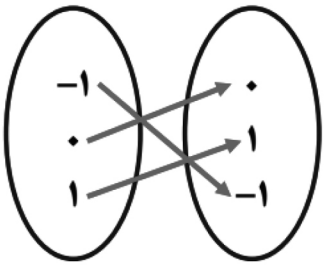
x	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$
y	-۱	$-۰/۳$	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$



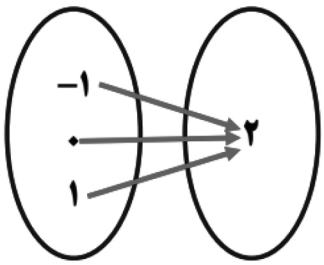


تمرین ۱۶ : **نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.)ثابت ، همانی ، چند ضابطه‌ای)**

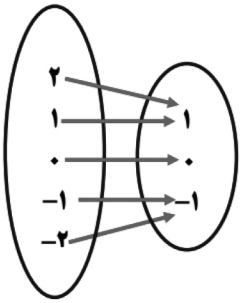
الف



ب



پ



تابع پلکانی

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه‌بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک‌خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت درواقع مصرف یک وسیله هزار واتی در مدت‌زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت (kwh) برق مصرف کرده‌ایم.

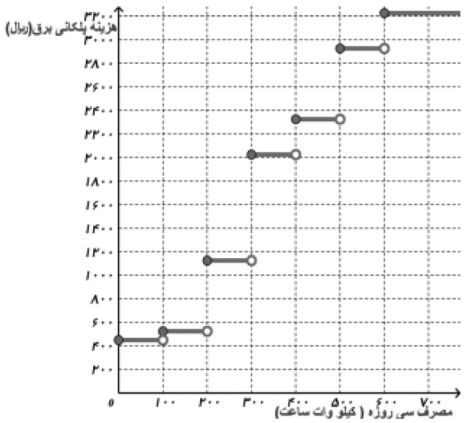
اگر فرض کنیم مصرف برق یک‌خانه در سی روز ۲۴۶ / ۳۳kwh بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به‌صورت پلکانی تقسیم می‌شود

پله‌های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰

مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵	۴۶/۲۳	۵۳۰۰۴
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۲۵		
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۳۲۵		
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۹۲۶		
مازاد بر ۶۰۰	۳۲۲۶		

مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند. (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش‌افزوده و عوارض برق و ... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

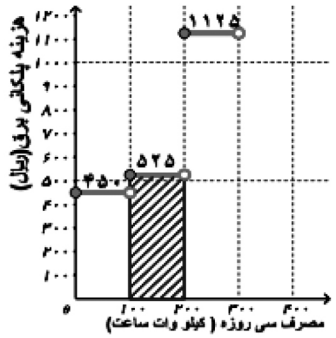
جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد



هر تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را تابع پلکانی می نامند.

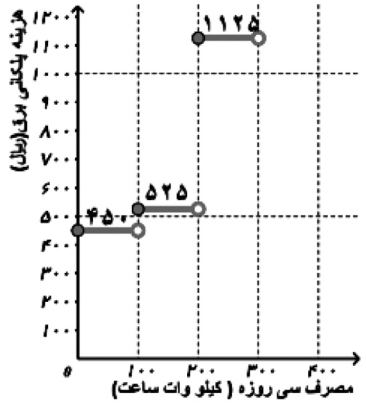
تمرین ۱۷ : به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک‌خانه:

الف) هزینه ۱۰۰kwh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



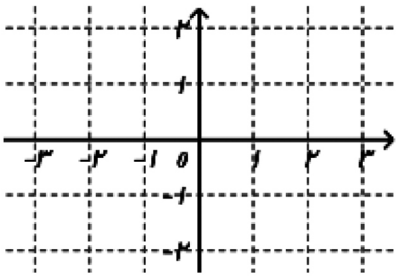
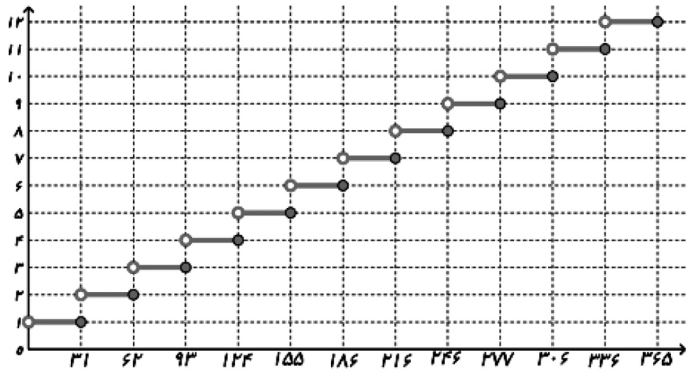
ب) مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

پ) هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید



تمرین ۱۸: بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y=f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



تمرین ۱۹ : نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحـــدهای آن‌ها را مشخص کنید. ضابط۵ تابع را بنویسید؟