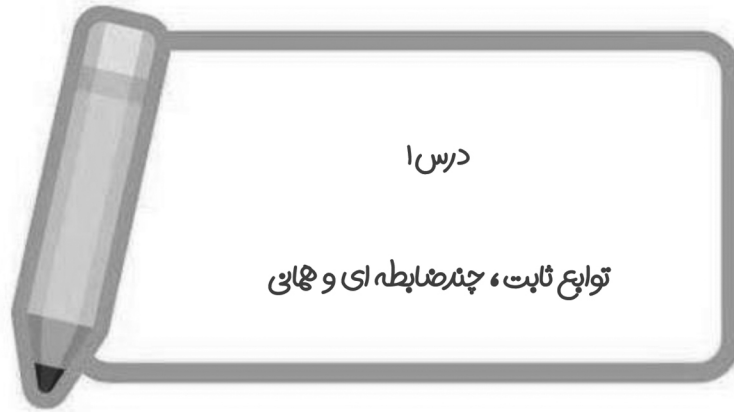


ریاضے و آمار ۲

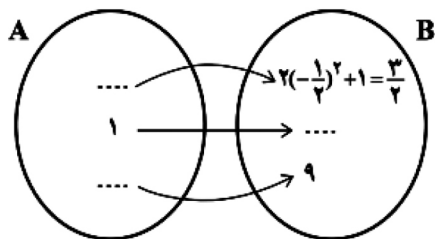




در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدید

تمرین ۱: اگر $A = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$ و $f(x) = \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{cases}$ باشد، با توجه به نمایش های مختلف تابع قسمت های زیر را کامل کنید.

(الف) در نمایش یکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A داریم:



بنابراین برد f مجموعه $B = \{ \quad , \quad , \quad \}$ است. نمایش یکانی رابطه فوق بیانگر یک

زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً خارج شده است.

(ب) نمایش زوجی مرتبی آن به صورت زیر است:

$$f = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right), (1, 1), (2, 9) \right\}$$

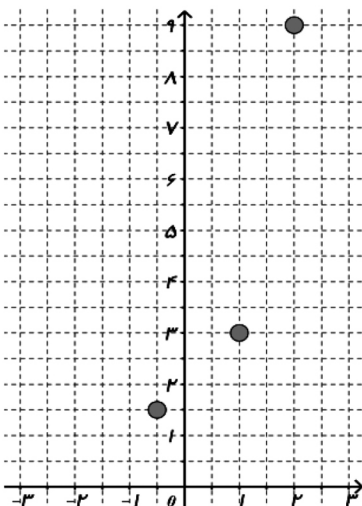
$$D_f = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\} \text{ و } R_f = \left\{ \frac{3}{4}, 1, 9 \right\}$$

مجموعه های D_f و R_f دامنه و برد تابع f را تشکیل می دهد.

(پ) نمایش مختصاتی آن نیز چنین است؛ تصویر این نقاط بر روی

محور x ها؛ یعنی $\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \}$ دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور y ها $\{ \frac{3}{4}, 1, 9 \}$ برد تابع

نامیده می شود.



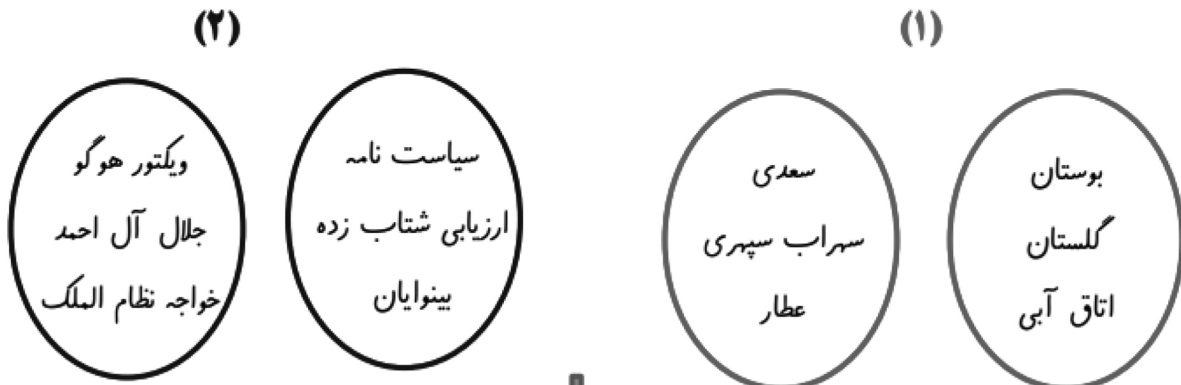


تمرین ۲: ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته شده را کامل کنید.

الف) رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

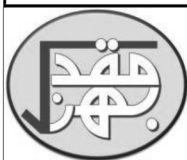


ب) رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



تمرین ۳: حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌های تمرین قبل که تابع هستند، کامل کنید.

نمایش جدولی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
الف		



			ب
--	--	--	---

با توجه به جدول بالا:

نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

انواع توابع (ثابت، چندضابطه ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

دیران یک فروشگاه به دلایلی تصمیم گرفته اند هزینه استفاده از فروشگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند.

پیش از این، هزینه استفاده از فروشگاه ثابت بوده است. (مستقل از ساعت و روز هفته).



برای اجرای این تقسیم ابتدا به کمک دوربین های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفته هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از اجدول روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول زیر نمایش داده شده است:

ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	روز
اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم	
۸-۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷	۱۷-۱۸	۱۸-۱۹	۱۹-۲۰	
۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰	شنبه
۱۱	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰	یکشنبه
۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰	دوشنبه
۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰	سه شنبه
۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰	چهارشنبه
۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۴۰	۶۱۰	۷۴۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰	پنجشنبه
۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۴۰	۴۱۰	جمعه

با در نظر گرفتن جدول صفحه قبل، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول زیر تعیین شده است:



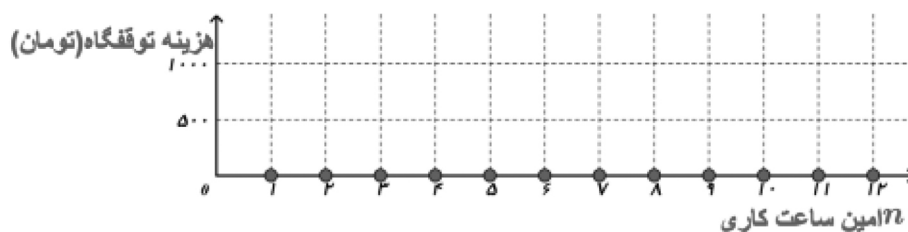
جدول ۲

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
۰-۱۰۰	رایگان
۱۰۰-۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰-۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰-۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰-۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰-۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰-۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

تابع ثابت

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار « n امین ساعت کاری فروشگاه - هزینه دریافتی» را برای روز شنبه در

نخستین هفته هوشمند سازی رسم می کنیم.

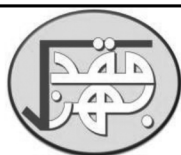


این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=2$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است؛ تابع

ثابت نامیده می شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به صورت $C: A \rightarrow B$ است که در آن $D_C = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 12\}$ $C(n) = 0$

دامنه تابع و $R_C = \{0\}$ برد تابع C را تشکیل می دهند.





تمرین ۴: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی در جدول ۲ نمودار زیر را برای روز یکشنبه کامل کنید.

تابع را که در آن مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است

تمرین ۵: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲ نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید.

لست

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$1 + 9 + 76 = 86$$

x	1	$\epsilon b - 7$	$\frac{c}{2}$	35
y	$2a - 1$	5	$a + b$	35

$2a - 1 = 1 \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$
 $\epsilon b - 7 = 5 \Rightarrow \epsilon b = 12 \Rightarrow b = 3$
 $\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$

$C = 1$
 $C = 1$

86
 81
 92



الف) جاهای خالی را کامل کنید.

ب) دامنه روز دوشنبه چه تفاوت‌هایی با دامنه نمودار در روز شنبه و یکشنبه دارد؟

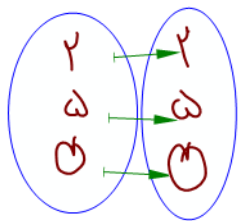
$$\begin{cases} C : AB \\ Cx = \end{cases}$$

$$R_C = \{ \quad \}$$

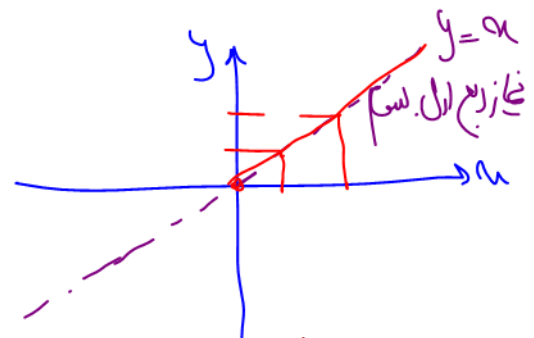
$$D_C \{x \in \mathbb{R} \mid \quad \}$$

پ) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

$$f = \{(2,2)(5,5)(-1,-1)(7,7)(6,6)\}$$



$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f(2) &= 2 \\ f(5) &= 5 \\ f(-1) &= -1 \\ f(7) &= 7 \\ f(6) &= 6 \end{aligned}$$

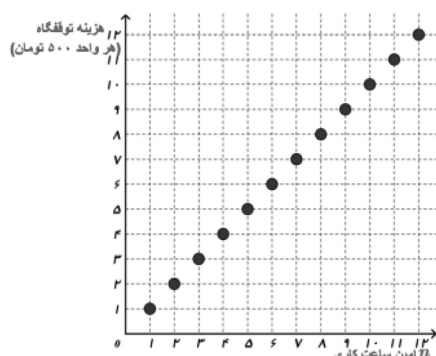
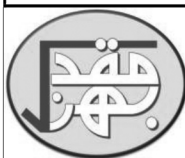


تأثیر دایره‌ای

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x & 2 & 5 & -1 & 7 & 6 \\ \hline y & 2 & 5 & -1 & 7 & 6 \end{array}$$

تابع همانه = هوته

تمرین ۱۴: برای روز پنج‌شنبه به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی n واحد هر واحد ۵۰۰ تومان باشد بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:

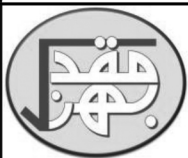


الف) مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟

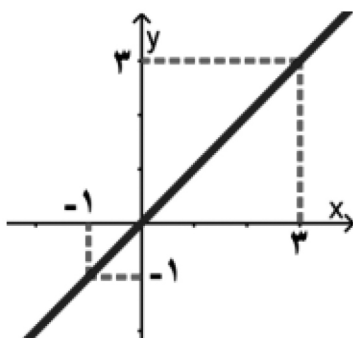
ب) اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آنچه تغییری می‌کند؟

تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره

$$R_f = \mathbb{R} \text{ و } D_f = \mathbb{R} \text{ با یکدیگر برابرند.}$$

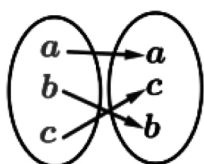
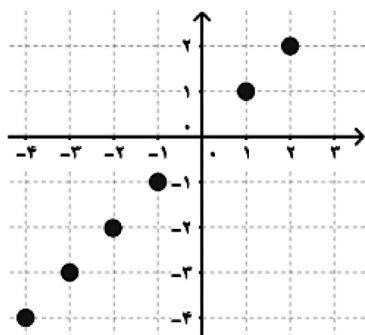


از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.



تمرین ۱۵: نمونه‌هایی از توابع همانی در اینجا ارائه شده‌اند، دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

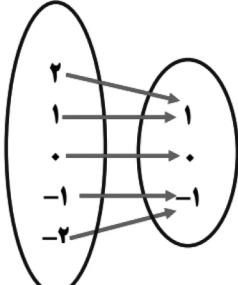
x	-۱	-۰/۳	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$
y	-۱	-۰/۳	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$



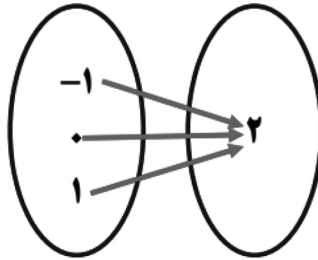
تمرین ۱۶: نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. (ثابت، همانی، چند ضابطه‌ای)



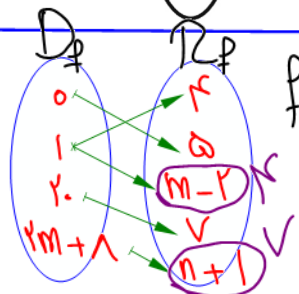
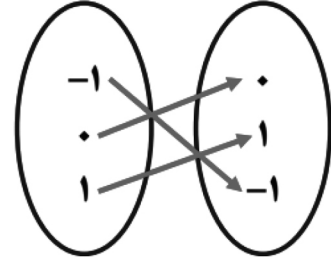
پ



ب



الف



ف = $\{(1, 4), (2, 5), (10, m-2), (2, 7), (2m+1, n+1)\}$ تست ← اگر نمودار رو ببینیم باید بر دامنه گرام است؟

$m-2=4 \Rightarrow m=6$

$n+1=7 \Rightarrow n=6$

$R_f = \{4, 5, 7, 10\}$

الف) $\{4, 5, 10\}$
ب) $\{4, 5, 7\}$
ج) $\{4, 5, 10\}$
د) $\{4, 5, 7, 10\}$

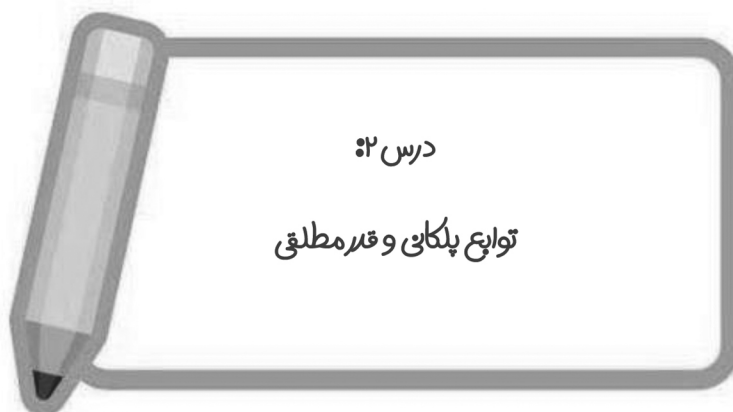
تست ← اگر $f = \{(1, 4), (2, 5), (10, 4y)\}$ تابعی تابع باشد میانگین اعضای دامنه بر دامنه است؟

$4y = 4 \Rightarrow y = 1$

$10 - y = 4 \Rightarrow 10 - 1 = 9 \Rightarrow n = 9$

$f: \{(1, 4), (2, 4), (10, 4)\}$

$1 + 4 + 2 + 10 = 17 \Rightarrow \frac{17}{4} = 4.25$



تابع پلکانی

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می شود. یک کیلووات ساعت در واقع مصرف یک وسیله هزار وات در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لاسپ صد وات را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت (kwh) برق مصرف کرده ایم.

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز ۳۳/۲۴۶ kwh بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می شود

پله های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰



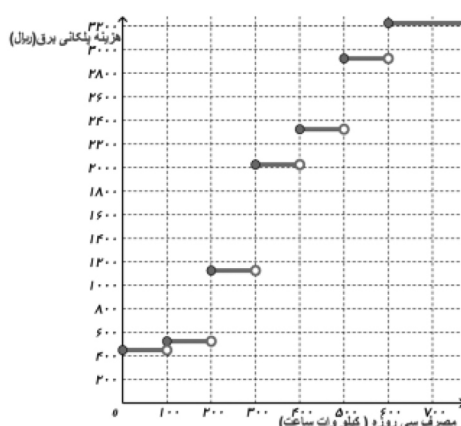
ریاضی و آمار ۲

۵۳۰۰۴	۴۶/۲۳	۱۱۲۵	مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰
		۲۰۲۵	مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰
		۲۳۲۵	مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰
		۲۹۲۶	مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰
		۳۲۲۶	مازاد بر ۶۰۰

مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند. (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و

عوارض برق و ... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد

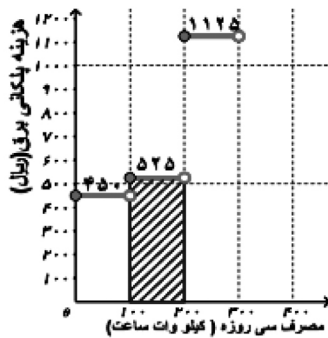


هر تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را تابع پلگانی می‌نامند.



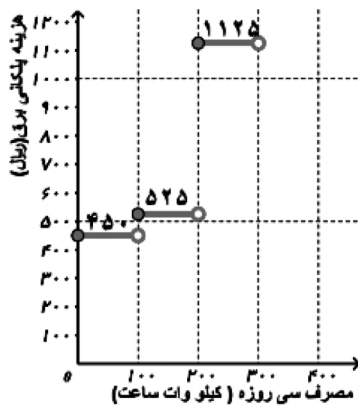
تمرین ۱۷: به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:

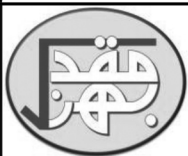
الف) هزینه ۱۰۰۰ kwh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



ب) مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

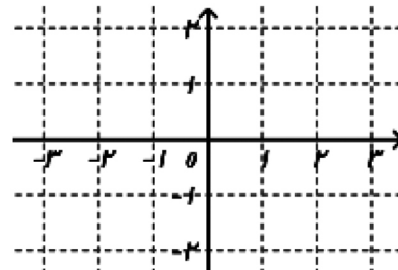
پ) هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید





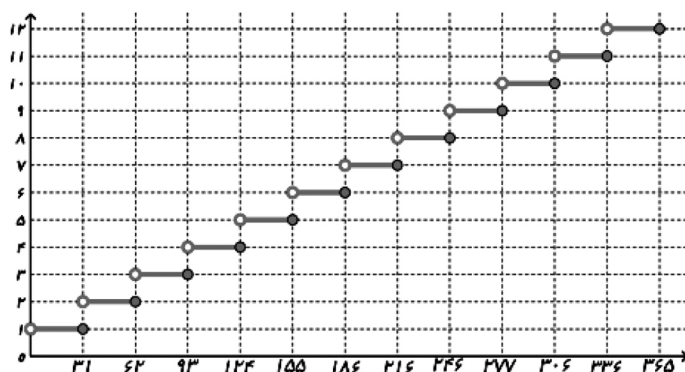
تمرین ۱۸: بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y = f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



تمرین ۱۹: نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت هایی هستند؟ واحدهای

آن ها را مشخص کنید. ضابطه y تابع را بنویسید؟





ریاضی و آمار ۲

تمرین ۲۰: هرکدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمایی و رانندگی سه‌حالتی



تابع جزء صحیح

فرض کنید y تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح

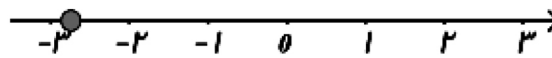
کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.



مثال: در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد. به بیانی دیگر:

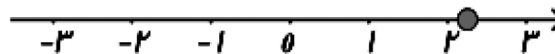


اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد نسبت می‌دهد.



$$..... \leq x < \Rightarrow g(x) =$$

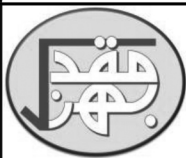
و اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد نسبت می‌دهد.



$$..... \leq x < \Rightarrow g(x) =$$

تمرین ۲۱: به کمک تابع g که در بالا تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

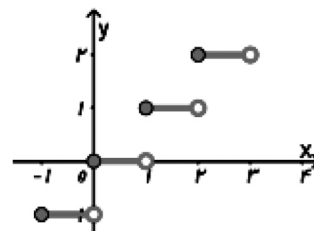
حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) =$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) =$	



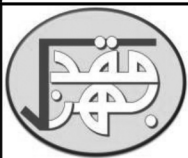
$0 \leq x < 1$	$g(x) =$	
$1 \leq x < 2$	$g(x) =$	
$2 \leq x < 3$	$g(x) =$	

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چند ضابطه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



تابعی را که به هر عدد صحیح k فواید همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و عدد صحیح $k+1$ را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطه این تابع را با $g(x) = [x]$ معرفی می‌کنند.



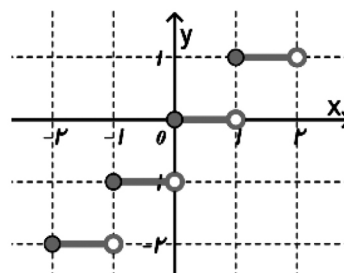
تمرین ۲۱: به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

$$\begin{aligned} [2] &= & [2/7] &= & [-2/7] &= & [0/7] &= \\ [-0/7] &= & [-0/07] &= & [-3/2] &= & [-\pi] &= & [-2/2] &= \end{aligned}$$



تمرین ۲۲: نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در فاصله $-2 \leq x < 2$ رسم کنید.

x	$y = [x]$	نقطه ابتدایی	نقطه انتهایی
$1 \leq x < 2$	$y = 1$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$0 \leq x < 1$	$y = 0$	$(0, 0)$	$(1, 0)$
$-1 \leq x < 0$	$y = -1$	$(-1, -1)$	$(0, -1)$
$-2 \leq x < -1$	$y = -2$	$(-2, -2)$	$(-1, -2)$

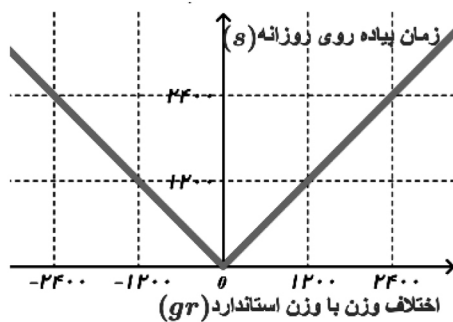


تابع قدر مطلق

هرچند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند. بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند.



هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه یعنی ۲۰ دقیقاً روزانه به صورت منظم پیاده روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه



۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه

این مفهوم را می توان به کمک نمودار زیر نشان داد

اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با

علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده روی

بر حسب ثانیه را نشان می دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200$$

$$f(-1200) = 1200$$

$$f(2400) = 2400$$

$$f(-2400) = 2400$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه ای می نویسیم:

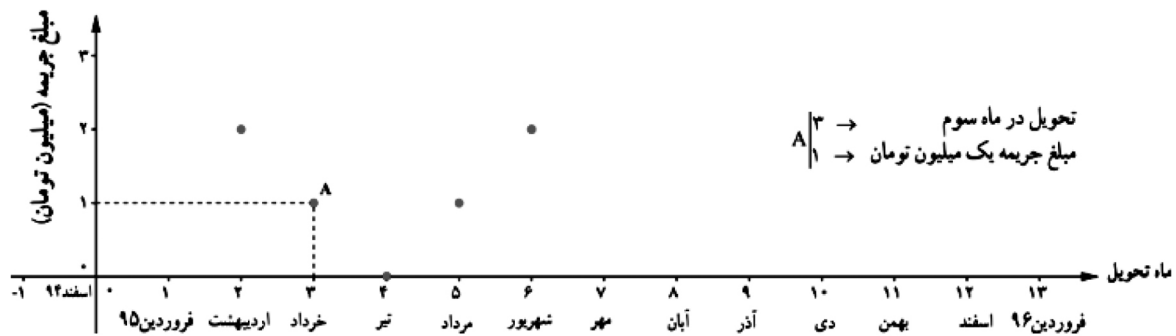
این تابع را می توان چنین تغییر کرد که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می کند



تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعریف:

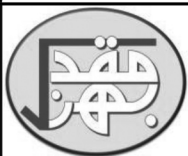
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تمرین ۲۳: بر اساس قرارداد میان پیمانکار پل رودخانه سیمینه رود و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف بازمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک میلیون جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد. الف) نمودار جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه های مختلف را کامل کنید. (زمان تحویل تیرماه ۱۳۹۵)

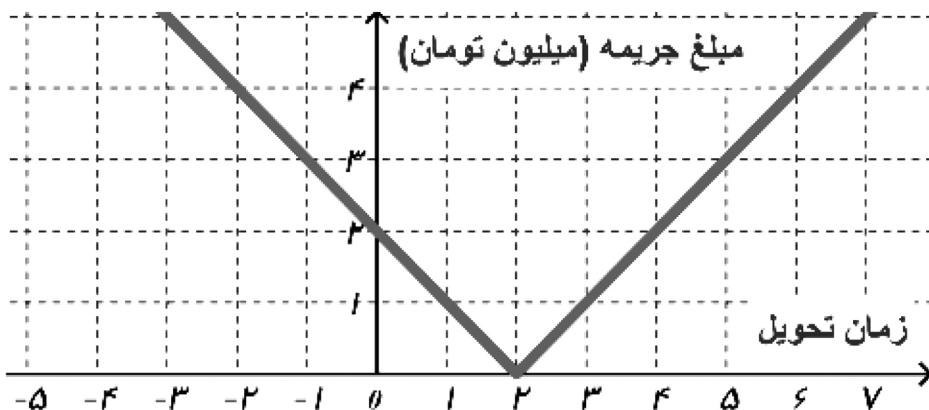


ب) آیا می توان این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلق بیان کنید؟

پ) اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه را در چه ماه یا ماه هایی انجام شده است؟ چرا؟



تمرین ۲۴: با توجه به نمودار

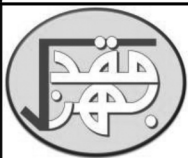


الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پ) به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

ت) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمان کار و وزارت راه چه معنایی دارد؟



تمرین ۲۵: نمودار تابع $y = |2x - 6|$ را رسم کنید.

$$|\mu| = \begin{cases} \mu & \mu \geq 0 \\ -\mu & \mu < 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 \\ -2x + 6 & 2x - 6 < 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

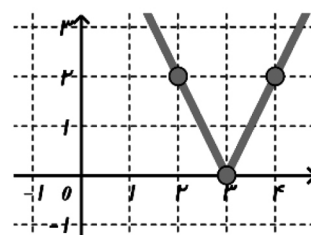
$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -2x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع این گونه مشخص می شود:

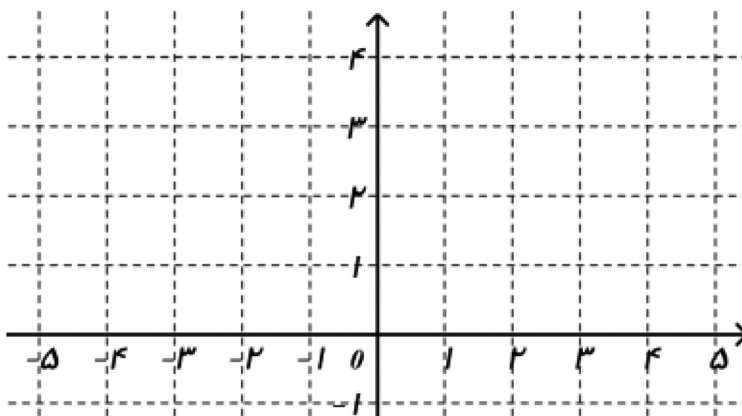
و نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود:

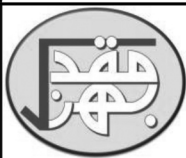
x	۲	۳
y	۲	۰

x	۳	۴
y	۰	۲



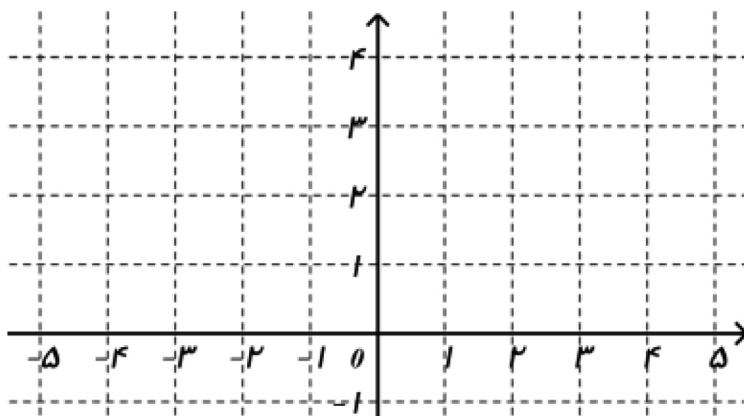
تمرین ۲۶: الف) نمودار توابع $y = |x|$ و $y = |x - 4|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



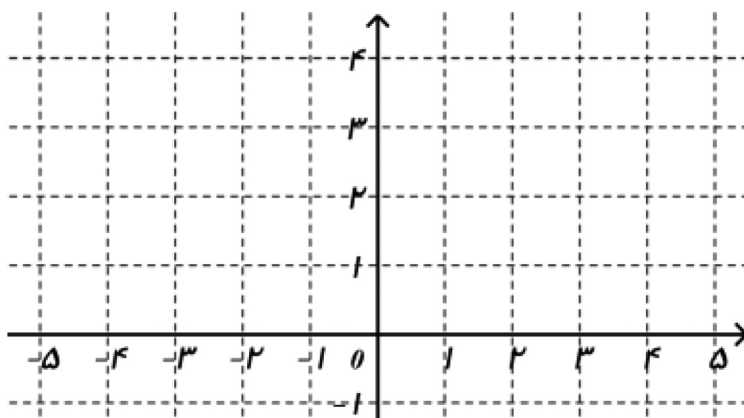


ب) آیا می‌توان بدون مراحل بالا، بر اساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 4|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

پ) نمودار تابع $y = |x - 3|$ و $y = |x + 1|$ را با توجه به نتیجه قسمت «ب» رسم کنید



ت) نمودار تابع $y = |x| + 1$ را چگونه می‌توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟





درس ۳: اعمال روی توابع

تمرین ۲۷: علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و می‌خواهد پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) را به تماشای یک فیلم یا تئاتر جشنواره دهه فجر دعوت کند. او ابتدا به خانواده‌اش پرسش‌نامه‌ای می‌دهد تا فیلم یا تئاتر مورد علاقه‌شان را انتخاب کنند. زیرا او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده‌اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سینمایی آن‌ها و خودش را تأمین کند

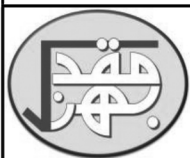
با توجه به بودجه محدودی که او برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بدانند هزینه صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱ هزینه بلیط با توجه به گروه‌های مختل

مکان نمایش	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
گروه سنی			
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰
دانشجو	= ۲۰٪ تخفیف	= ۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	= ۵۰٪ تخفیف	= ۵۰٪ تخفیف

علیرضا نتایج پرسش‌نامه داده‌شده به اعضای خانواده را در جدول‌های زیر مشخص نمود:

جدول ۲ علاقه‌مندی به سینمای کودک و نوجوان



سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
اعضای خانواده				
مریم	✓		✓	✓
علیرضا		✓	✓	✓

جدول ۳- علاقه مندی به سینما

سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه‌ای	علمی - تاریخی
اعضای خانواده						
مادر	✓			✓		✓
پدر		✓	✓	✓		
مریم						
علیرضا		✓		✓		✓

جدول ۴ علاقه مندی به تئاتر

سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
اعضای خانواده				
مادر	✓	✓	✓	
پدر		✓	✓	✓
مریم	✓		✓	
علیرضا		✓	✓	

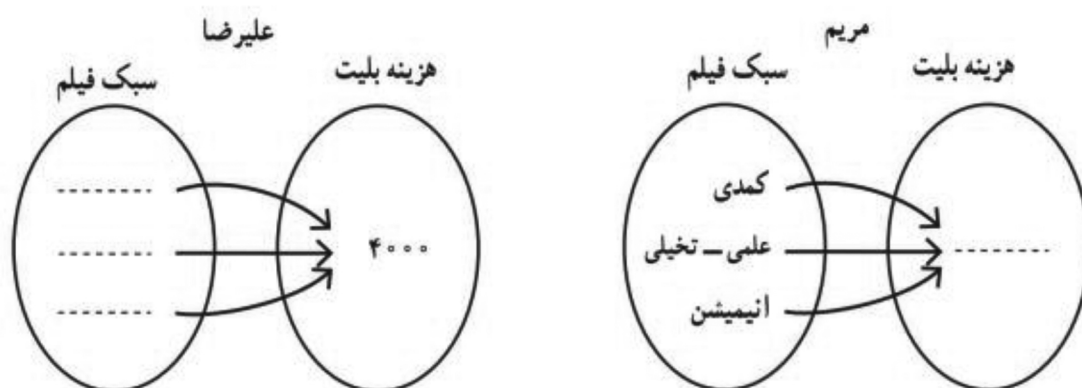


در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد. او باید دو نکته را مشخص کند:

- ۱- به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟
- ۲- هزینه بلیت آن‌ها چقدر است؟

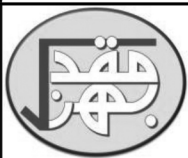
طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه‌مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقه، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که دامنه آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و برد آن هزینه خرید بلیت، نمایش پیکانی این دو تابع به صورت زیر است:

(ب) نمایش پیکانی این دو تابع را کامل کنید.



پس اشتراک فیلم مورد علاقه‌شان دو سبک فیلم و است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آن‌ها می‌توانند به سینما بروند.

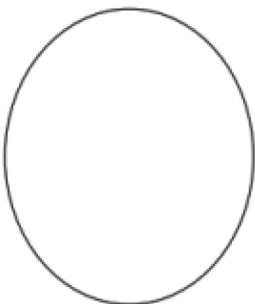
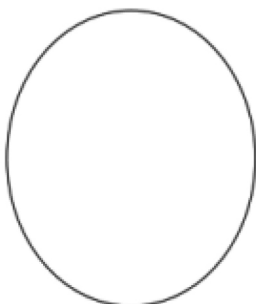
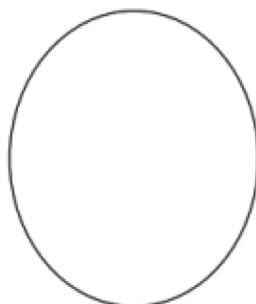
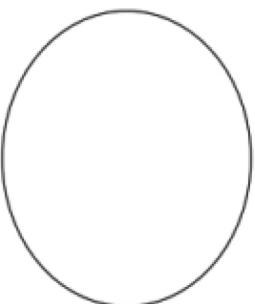
.....



تمرین ۲۸: اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواند مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و

۳:

الف) نمایش پیکانی مشابه تمرین صفحه قبل را برای هرکدام رسم کنید.

مادر		علیرضا	
سبک فیلم	هزینه بلیت	سبک فیلم	هزینه بلیت
			

ب) با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه هرکدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج) هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می کند، چقدر است؟

تمرین ۲۹: پنجشنبه علیرضا می خواهد همه اعضای خانواده اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و ۴:

الف) نمایش زوج مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همه آنها به تماشای یک تئاتر می روند، مشخص کنید.



ب) علیرضا در این روز چه میزان هزینه می کند؟

تمرین ۳۰: با توجه به تمرین های قبل با چه شرایطی می توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

همان گونه که عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مورد دو عدد و دو پندپمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است.



اگر f و g تابع باشند. توابع و دو تابع حقیقی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \{x | g(x) \neq 0\}$$

تمرین ۳۱: اگر $f = \{(1, 2), (-3, 4), (3, 5), (7, -1)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, -1), (7, 2)\}$ ، ابتدا دامنه تابع را به دست آورید و سپس را

به صورت مجموعه ای زوج های مرتب نشان دهید.

حل:

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\} \quad D_g = \{2, 3, 7\} \Rightarrow D_{f \cap g} = \{3, 7\}$$

$$f + g = \{(3, 5 + (-1)), (7, -1 + 2)\} = \{(3, 4), (7, 1)\}$$

تمرین ۳۲: اگر $f = \{(-2, 5), (7, 9), (-6, -4), (3, 0)\}$ و $g = \{(-3, 8), (-2, 0), (3, 11), (7, 1)\}$ باشند. دامنه توابع زیر را به

دست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه ای زوج های مرتب نشان دهید.

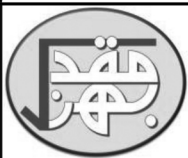


$$D_f =$$

$$D_g =$$

$$D_{f \cap g} =$$

$$(f + g)(\text{الف}) =$$



$$ب) (f - g) =$$

$$پ) (f \times g) =$$

$$ت) \left(\frac{f}{g} \right) =$$

تمرین ۳۳: با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$:

الف) ضابطه توابع زیر را به دست آورید. ($\mathbb{R}$ دامنه مشترک هردو تابع است.)

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x \Rightarrow f_3(x) = x^2 + x$$

$$f_4(x) = f_1(x) - f_2(x) = (x^2 - 1) - (x + 1) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 \Rightarrow f_4(x) = x^2 - x - 2$$

$$f_5(x) = f_2(x) - f_1(x) = \Rightarrow f_5(x) =$$

$$f_6(x) = f_1(x) \times f_2(x) \Rightarrow f_6(x) =$$

$$f_7(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \Rightarrow f_7(x) =$$

$$f_8(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \Rightarrow f_8(x) =$$

ب) مقادیر تابع‌های f_3 و f_8 به ازای $x = 2$ به دست آورید؟

$$f_3(x) = x^2 + x \Rightarrow f_3(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$$

$$f_4(x) = f_4(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f_4(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f_5(x) = \Rightarrow f_5(2) =$$

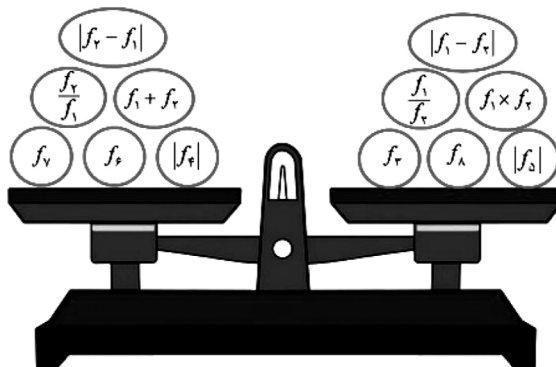
$$f_6(x) = \Rightarrow f_6(2) =$$

$$f_7(x) = \Rightarrow f_7(2) =$$

$$f_8(x) = \Rightarrow f_8(2) =$$



پ) اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌ای کفه ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو باهم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



تمرین ۳۴: با توجه به ضابطه‌های $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x - 1$:

الف) مقادیر تابع‌های زیر به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$$f(2) = \Rightarrow g(2) =$$

$$h_1(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h_1(2) =$$

$$h_2(x) = f(x) - g(x) = \Rightarrow h_2(2) =$$

$$h_3(x) = g(x) - f(x) =$$

$$h_4(x) = f(x) \times g(x) =$$

$$h_5(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$h_6(x) = \frac{g(x)}{f(x)} =$$

$$h_7(x) = \frac{h_1(x)}{h_3(x)} =$$

$$h_8(x) = h_2(x) \times h_4(x)$$

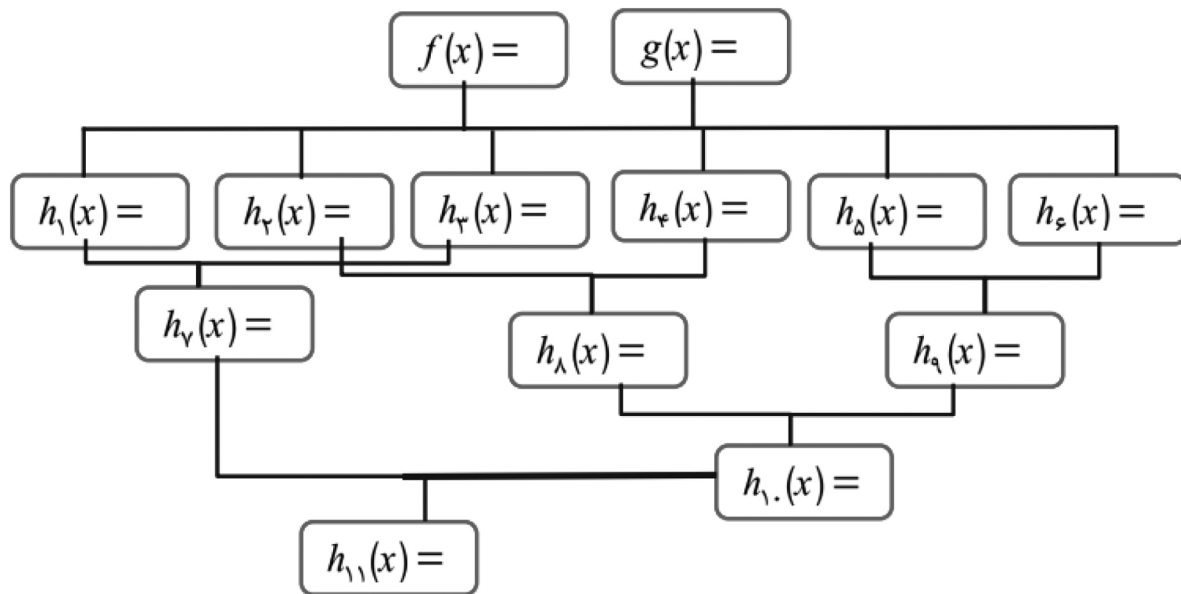
$$h_9(x) = h_5(x) + h_6(x)$$

$$h_{10}(x) = h_8(x) \times h_9(x)$$



$$h_{\gamma_1}(x) = h_{\gamma}(x) \times h_{\gamma_0}(x)$$

(ب) درخت زیر به ازای $x = 2$ کامل کنید.



تمرین ۳۵: اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, -3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشند، دامنه توابع زیر را به دست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه‌ای زوج‌های مرتب نشان دهید.

$$D_f =$$

$$D_{gg} =$$

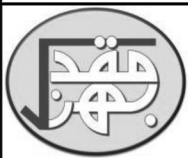
$$D_{f \cap g} =$$

الف) $f + g$

$$\mathbf{b})(f - g) =$$

$$\mathfrak{p})(g-f)=$$

$$\text{ت) } (f \times g) =$$

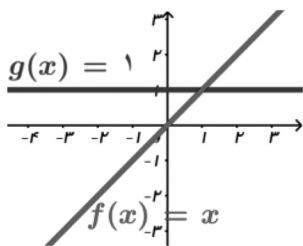


ث) $\left(\frac{f}{g}\right) =$

ج) $\left(\frac{g}{f}\right) =$

تمرین ۳۶: به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

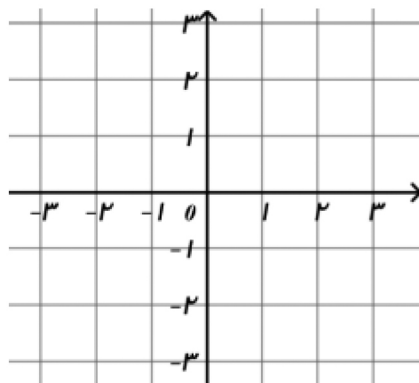
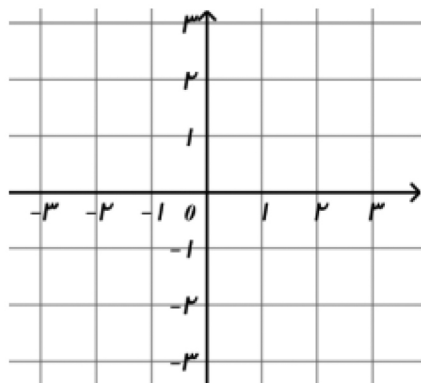
(الف)



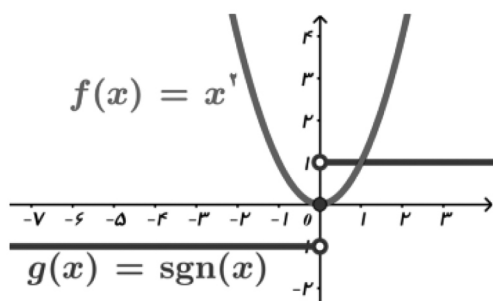
$x = -1$

$x = 0$

$x = 1$



(ب)

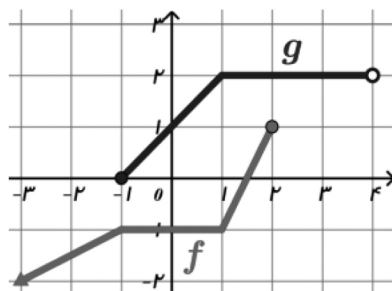
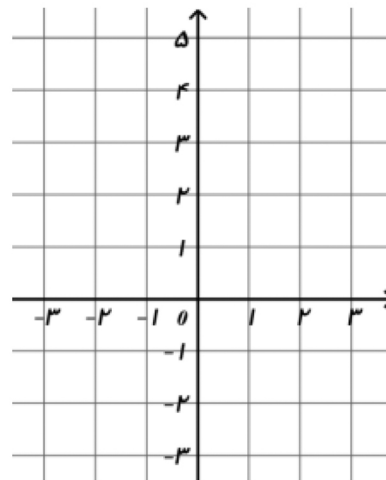
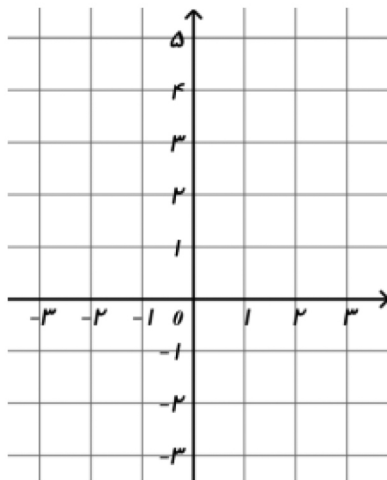


$x = -1$

$x = 0$

$x = 1$

$x = 2$



تمرین ۳۷: نمودار دو تابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر زیر را به دست آورید.

$$(f + g)(1)$$

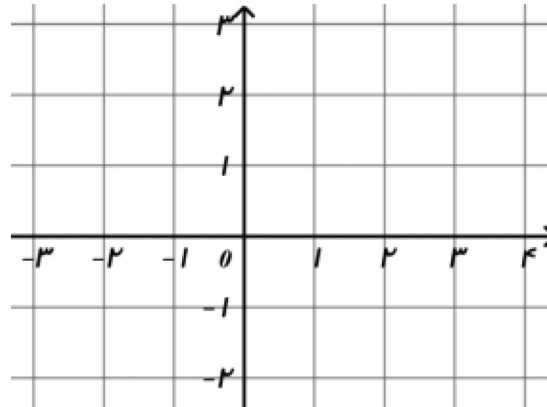
$$(f + g)(-1)$$

$$(f + g)(2)$$

$$(f + g)(0)$$



ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.



پ) ضابطه توابع f ، g و $f + g$ را به دست آورید.

تمرین ۳۸: به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا در نقاط داده شده مشخص کنید، سپس

نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

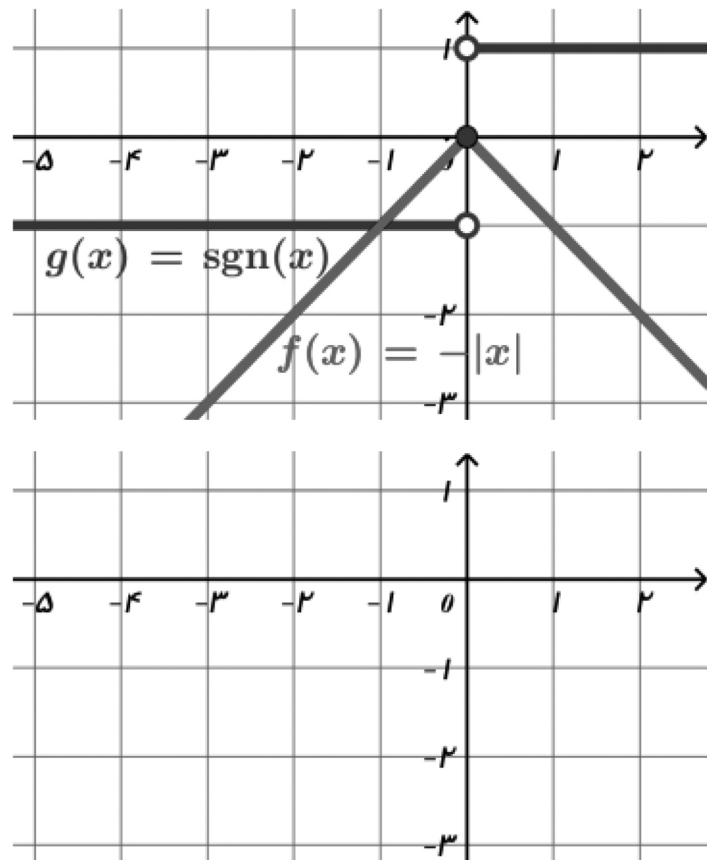
$$x = 2$$

$$x = 1$$

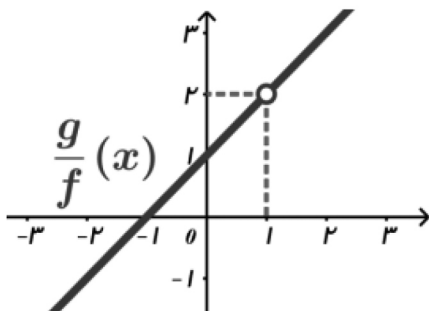
$$x = 0$$

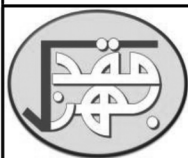
$$x = -1$$

$$x = -2$$



تمرین ۳۹: اگر $g(x) = x^2 - 1$ و نمودار تابع $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ به صورت زیر باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست آورید.





تمرین ۴۰: اگر $g(x) = x + 3$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 3$ تابع باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۴۱: اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $(f+g)(x) = 3x^2 - 5x + 7$ تابع باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۴۲: اگر توابع $f(x) = 1 - 2x$ و $g(x) = x^2 - 4x + 7$ باشند، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.

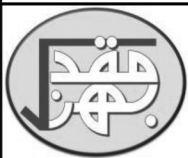
الف) $(f+g)(x) - (f-g)(x) =$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3) - (f \times g)(2) =$

تمرین ۴۳: اگر توابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x < 2 \\ -5 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x^2 \leq x < 0 \\ 6 & x < \end{cases}$ باشند، مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(3) + (f-g)(-2) - \left(\frac{f}{g}\right)(1) =$

ب) $(f \times g)(-4) + (f+g)(7)$



تمرین ۴۴: اگر توابع $fx = \begin{cases} -2 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ و $gx = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ باشند. مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(-2) \times (g)(0) =$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)^3 =$

تمرین ۴۵: یک مجتمع صنعتی دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه

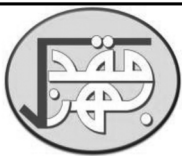
A به ترتیب $R_1(x) = 10x$ و $C_1(x) = x^2 + 2x - 30$ باشند و در کارخانه B به ترتیب $R_2(x) = 15x - x^2$

و $C_2(x) = 3x + 16$ واحد باشد.

الف) تابع سود مجتمع صنعتی را به دست آورید.

ب) این مجتمع صنعتی با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟





درس ۱

شاخص های آماری

بسیاری از مواقع کمیتابی وجود دارند که می توانند معرف پارامتر جامعه باشند. کمیتابی مانند میانگین ، ، مد ، میانه ، انحراف معیار ، واریانس ، چارک ها و ... را که در سال قبل با آن آشنا شدید اگر در یک جامعه بررسی کنیم به آنها پارامتر جامعه می گوئیم و اگر در نمونه ای از جامعه بررسی کنیم به آنها آماره نمونه می گوئیم.

مانند : میانگین قد تمام دانش آموزان دبیرستان آیین روشن یک پارامتر جامعه است و میانگین قد ۵۰ نفر از دانش آموزان دبیرستان آیین روشن یک پارامتر نمونه است.

شافص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.

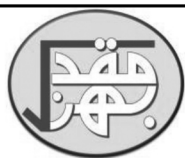


شاخص ها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها متغیرهای داده را خلاصه میکنند؛ بلکه واقعیتهای مفیدی را از جامعه به سادگی به ما نشان می دهند و امکان مقایسه را فراهم میکنند. مثلاً خط فقر شاخصی است که در آمد افرادی را که حداقل در آمد زندگی را ندارند، مشخص می کند. این شاخص به ما کمک میکند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست های دولت برای فقر زدایی را رصد کنیم.

خط فقر

تمرین ۱: درآمد ده نفر از کارکنان یک مؤسسه تجاری را که به شکل تصادفی انتخاب کرده ایم در جدول زیر آورده ایم:

ردیف	درآمد ماهیانه (تومان)	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد ماهیانه هر عضو	متوسط درآمد روزانه هر عضو
۱	۱۲۰۰۰۰۰	۳		
۲	۳۰۰۰۰۰۰	۴		
۳	۱۰۰۰۰۰۰۰	۱		
۴	۴۰۰۰۰۰۰	۵		
۵	۳۰۰۰۰۰۰	۱		
۶	۳۵۰۰۰۰۰	۷		
۷	۲۱۰۰۰۰۰۰	۳		
۸	۱۰۰۰۰۰۰۰	۴		
۹	۲۰۰۰۰۰۰۰	۲		
۱۰	۱۰۰۰۰۰۰۰	۱		



الف) جدول بالا را کامل کنید.

ب) میانگین و میانه درآمد ماهیانه خانواده چقدر است؟

۱۰۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰۰ ۱۲۰۰۰۰۰ ۲۱۰۰۰۰۰ ۳۰۰۰۰۰۰ ۳۰۰۰۰۰۰ ۳۵۰۰۰۰۰ ۴۰۰۰۰۰۰

$$m = \frac{2000000 + 2100000}{2} = 2050000$$

$$\bar{x} = \frac{3 \times 1000000 + 1200000 + 2000000 + 2100000 + 2 \times 3000000 + 3500000 + 4000000}{10}$$

$$= \frac{21800000}{10} = 2180000$$

ب) میانگین و میانه درآمد هر یک از افراد چقدر است؟

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است.

نمونه مناسبه خط فقر خط فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

$$\text{خط فقر از طریق میانگین} = \frac{\quad}{2}$$

$$\text{خط فقر از طریق میانه} = \frac{\quad}{2}$$



ریاضی و آمار ۲

تمرین ۲: در تمرین یک خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کنید هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند به کدام یک از کارکنان چه میزان یارانه بدهند که خانواده او حداقل در آمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

فقط فقر بین المللی توسط بانک جهانی ۲۵/۱ دلار آمریکا برای هر نفر در روز تعیین شده است.

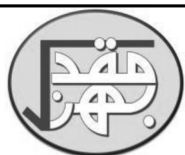
که با نرخ دلار سال چاپ کتاب این فقط حدود ۳۰۰۰ تومان می شود.

تمرین ۳: در تمرین یک چند خانوار در آمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.

تمرین ۴: اگر در آمد یک خانواده ۳ نفری در یک ماه ۲ میلیون تومان باشد، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟

تمرین ۵: متوسط درآمد ماهیانه یک خانواده سه نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا طبق خط فقر بین المللی) شخص فقیر

نباشد؟



تمرین ۶: چه موقع دو روش محاسبه خط فقر تفاوت زیادی با هم دارند؟ چرا؟

شاخص بهای کالاها و خدمات

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه ای از تعداد

زیادی کالا و خدمات در طول یک سال است.

این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می دهد.

نحوه محاسبه شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

گام اول: انتخاب سال پایه



سال پایه هر چند سال یکبار توسط بانک مرکزی با توجه به ساختار جامعه تعیین میگردد زیرا با گذر زمان و پیشرفت تکنولوژی و ظهور کالاهای جدید سید مصرفی خانوار تغییر می یابد. به فرض مثال چند سال پیش از نوار کاست استفاده می شد اما اکنون CD ها و DVD و ... جانشین آن شده اند.

گام دوم: انتخاب سبد مصرفی خانوارها در سال پایه

سبد مصرفی خانوارها مجموعه ای از کالاهای و خدمات مصرفی مانند خوراکیها آشامیدنی، ها، حمل و نقل، اینترنت و ... است. او خدمات در سید مصرفی خانوار و زندهای متفاوت دارند انتخاب سید مصرفی و اندازه گیری وزن کالاهای و خدمات توسط بانک مرکزی در سال پایه صورت می گیرد.

گام سوم: محاسبه هزینه خانوار در سال پایه و سال مورد نظر بر اساس سید مصرفی انتخابی در سال پایه

در یک جامعه فرضی سبد مصرفی شامل دو کالای A و B باشد هزینه خانوار در سال پایه و مورد نظر به صورت زیر محاسبه می گردد:

مقدار مصرف این دو کالا در سال پایه : p'_A, p'_B

قیمت دو کالا در سال پایه : p_A, p_B

قیمت دو کالا در سال مورد نظر : p_A, p_B

$p_A \times q_A + p_B \times q_B$ = هزینه خانوار در سال پایه

$p'_A \times q_A + p'_B \times q_B$ = هزینه خانوار در سال مورد نظر



گام چهارم: محاسبه شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی از تقسیم هزینه خانوار در سال مورد نظر بر هزینه خانوار در سال پایه ضرب در ۱۰۰ بدست می آید

$$\text{شاخص بهای دو کالا} = \frac{p'_A \times q_A + p'_B \times q_B}{p_A \times q_A + p_B \times q_B} \times 100$$

$$\text{مقدار کالا در سال پایه} \times \text{قیمت کالا در سال مورد نظر} = \text{شاخص بهای یک کالا}$$

$$\text{پایه سال در کالا مقدار} \times \text{قیمت کالا در سال پایه}$$

تمرین ۷: اگر سید هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال و در سال مورد نظر ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد شاخص بهای نان و گوشت را محاسبه کنید.

$$\text{هزینه خانوار در سال مورد نظر} = 1500 \times 200 + 70000 \times 80 = 300000 + 5600000 = 5900000$$

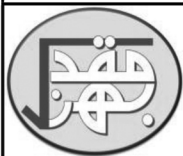
$$\text{هزینه خانوار در سال پایه} = 1000 \times 200 + 50000 \times 80 = 200000 + 4000000 = 4200000$$

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{5900000}{4200000} \times 100 \approx 140/5$$

تمرین ۸: قیمت و مقدار برخی کالاهای تولید و مصرف شده یک پروژه ساختمان سازی برای دو سال به صورت مقابل است،

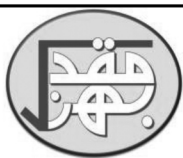
شاخص بهای این کالاها را محاسبه کنید.

ردیف	نوع کالا	سال ۱۳۹۵ مقدار مصرف (تن)	سال ۱۳۹۵ قیمت (تومان)	سال ۱۳۹۷ قیمت (تومان)
۱	سیمان			
۲	گچ			
۳	آجر			



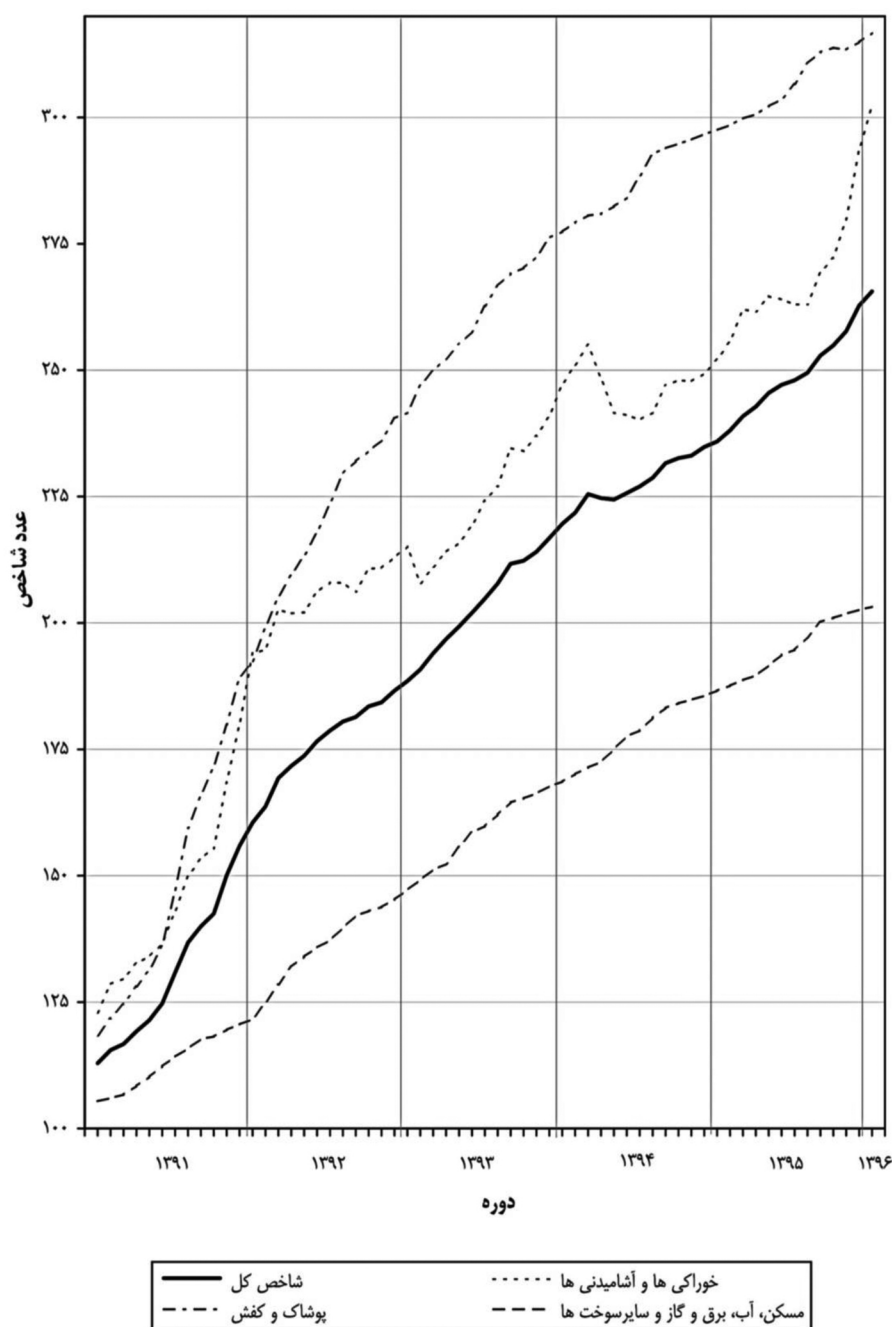
تمرین ۹: قیمت و مقدار برخی کالاهای تولید و مصرف شده کشاورزی برای دو سال به صورت مقابل است، شاخص بهای این کالاها را محاسبه کنید.

ردیف	نوع کالا	سال پایه ۱۳۸۰		سال ۱۳۸۸	
		قیمت (تومان)	مقدار مصرف قیمت (میلیون تن)	قیمت (تومان)	مقدار مصرف (میلیون تن)
۱	گندم	۱۰۰۰	۱۰	۱۲۰۰	۲۰
۲	برنج	۲۰۰۰	۵	۲۵۰۰	۱۰
۳	لوبیا	۳۰۰۰	۳	۴۰۰۰	۵
۴	عدس	۲۵۰۰	۲	۳۵۰۰	۵



شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی و برخی گروههای اصلی در مناطق شهری ایران

($1390=100$)



تمرین ۱۰: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.



الف) در نمودار شاخص بهای کالا و خدمات محور طول ها نشان دهنده و محور عرضها نشان دهنده..... است.

ب) شاخص بهای کالا و خدمات به واحد اندازه گیری بستگی

پ) به نظر میرسد افزایش شاخص بهای کالا و خدمات نشان دهنده شدن هزینه اقلام خوراکی و

ت) شاخص بهای کالا و خدمات بر اساس تعداد متغیر محاسبه می شود.

تمرین ۱۱: اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

تمرین ۱۲: آیا پرداخت یارانه ثابت طی سالهای آتی می تواند در همه این مدت در آمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟

تمرین ۱۳: هزینه های زندگی یک خانواده در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است.

کل	خوراکی و آشامیدنی	مسکن	پوشاک	نوع هزینه
۸۵۰	۲۱۰	۷۵۰	۳۰۰	هزینه در سال ۱۳۹۰

الف) هزینه پوشاک در آبان ۱۳۹۱

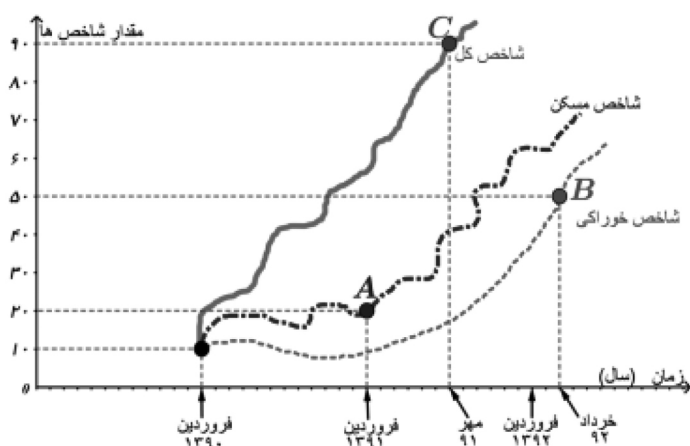


ب) هزینه مسکن در خرداد ۹۳

پ) هزینه خوراکی و آشامیدنی در دی ماه ۱۳۹۵

ت) هزینه کل در فروردین ماه ۱۳۹۶

تمرین ۱۴: با توجه به نمودار شاخص بها و کالای روبه رو هزینه مسکن در فروردین ۹۱ و هم چنین هزینه خوراکی در خرداد ۹۲ چقدر است؟ (هزینه مسکن و هزینه خوراکی در سال پایه به ترتیب برابر ۲۰ و ۸ میلیون تومان می باشد.)





تورم

تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می نامند. $P_1 - P_0$ تورم

شاخص بهای کالا و خدمات سال پایه : P_0

شاخص بهای کالا و خدمات سال مورد نظر : P_1

معمولاً شاخص بهای یک کالا یا خدمت در سال پایه را برابر عدد ۱۰۰ می گیرند.



$$\text{تورم} = \frac{140}{5} - 100 = 40 / 5\%$$

مثال: محاسبه تورم برای تمرین ۷

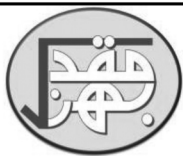
زمانی شاخص بهای یک کالا یا خدمات در سال پایه ۱۰۰ نباشد: $\frac{P_1 - P_0}{P_0} \times 100$ تورم (درصد)



تمرین ۱۵ : شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی به صورت فرضی در جدول مقابل داده شده است، نرخ تورم را در سال ۱۳۷۶ تا

۱۳۷۸ محاسبه نمایید (سال ۱۳۷۵ سال پایه در نظر بگیرید).

سال	شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی	تورم
۱۳۷۵	۱۰۰	
۱۳۷۶	۱۲۰	
۱۳۷۷	۱۵۰	
۱۳۷۸	۲۰۰	



تمرین ۱۶: اگر سبد هزینه خانواری شهرنشین در سال پایه برای دو کالای مشخص در سال پایه به ترتیب ۱۷۵۰ و ۳۸۰۰۰ تومان بوده و هزینه آن دو کالا در سال مورد نظر به ۲۰۰۰ و ۵۴۰۰۰ تومان برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۳۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد:

الف) شاخص بهای این دو کالا را مشخص کنید.

ب) مقدار تورم موجود را تعیین کنید.

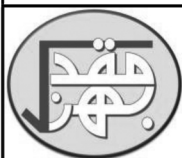
نرخ بیکاری

جمعیت بیکار

نرخ بیکاری: عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال.

= $\frac{\text{نرخ بیکاری}}{\text{جمعیت فعال}}$

جمعیت فعال



جمعیت فعال : به مجموع جمعیت شاغل و بیکار گفته می شود.

جمعیت بیکار: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله ای که سه شرط زیر را توانمان دارا باشد:

(۱) در هفته مرجع حتی یک ساعت هم کار نکرده باشد.

(۲) آمادگی برای انجام دادن کار داشته باشد.

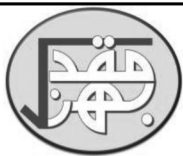
(۳) در هفته مرجع و سه هفته قبل از آن، جویای کار بوده باشد.

جمعیت شاغل: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله ای که در یک هفته مرجع بازه زمانی هفت روزه ای که وضع فعالیت افراد در آن در

نظر گرفته میشود حداقل یک ساعت کار کرده باشد.

تمرین ۱۷: در یک کشور، تعداد بیکاران ۳ میلیون نفر و تعداد شاغلین ۱۷ میلیون نفر است. شاخص نرخ بیکاری در این کشور

چند درصد است؟



تمرین ۱۸: در یک منطقه شاخص نرخ بیکاری ۴۰ درصد است. اگر جمعیت فعال این منطقه ۱۸۰ هزار نفر باشد.

الف) تعداد بیکاران را بدست آورید.

ب) تعداد شاغلین چند نفر است؟

تمرین ۱۹: در سر شماری یک روستا کل جمعیت ۷۵۰ نفر و جمعیت افراد کمتر از ۱۶ سال ۲۲۰ نفر بوده است و ترکیب جمعیت

۱۶ بالای ساله و بالاتر این روستا (از نظر فعالیت) به صورت زیر بوده است:

جمع	سایر (نامید از پیدا شدن کار، بیمار و ...)	در حال تحصیل	خانه دار	بیکار	دارای درآمد بدون کار	شاغل	نوع جمعیت
۵۳۰	۵۰	۱۸۰	۱۰۰	۲۵	۲۵	۱۵۰	تعداد

الف) نرخ بیکاری را بدست آورید.

ب) در این روستا سال آینده یک کارگاه نجاری تأسیس می شود و ده نفر از جمعیت بیکار روستا جذب این کارگاه می شوند،

نرخ بیکاری چقدر کاهش می یابد؟



پ) اگر بخواهیم نرخ بیکاری به ۰۴/۰ کاهش پیدا کند چند نفر از بیکاران جدول باید مشغول به کار شوند؟

نمایه توده بدنی یا نماتوب (BMI)

وزن (برحسب کیلوگرم)

نماتوب = _____

مربع قد (برحسب متر)

نماتوب: این شاخص میزان اضافه وزن یا کمبود وزن را نشان می دهد.

با استفاده از این ، رابطه برای هر فرد نماتوب محاسبه می شود که به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه گیری می شود:

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow 19 < \text{نماتوب}$ (الف)

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow 25 < \text{نماتوب} \leq 19$ (ب)



شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow 30 < \text{نماتوب} \leq 25$ (پ)

شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow 30 \geq \text{نماتوب}$ (ت)

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول رو به رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می کنند.

گروه سنی	۱۹-۲۴	۲۵-۳۴	۳۵-۴۴	۴۵-۵۴	۵۵-۶۴	بالا تر از ۶۵
نماتوب مناسب	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

تمرین ۲۰: فردی ۳۸ ساله وزن ۹۰ کیلوگرم و قد ۱۷۰ سانتی متر دارد. آیا این شخص اضافه وزن دارد؟

تمرین ۲۱: مقدار شاخص توده بدنی فردی برابر ۲۵ است اگر قد او ۱۸۹ سانتی متر باشد. وزن این شخص چند کیلوگرم است؟



شاخص پایه آموزش

فهرستی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتقاب واژه های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

یکی از شاخص های خوانایی که سالهای تحصیلی خواننده متون انگلیسی را تخمین میزند به صورت زیر تعریف شده است:

$$[0.4 \times (\text{میانگین تعداد کلمات در جمله} + \text{درصد کلمات دشوار})] = \text{شاخص پایه آموزش}$$

این شاخص عددی بین ۱۲ تا ۱۸ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است.

مثال: در یک متن، میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۸ کلمه و درصد کلمات دشوار در آن ۵/۲ است، شاخص پایه آموزش در این متن را حساب کنید.

$$[0.4 \times (2/5 + 8)] = [0.4 \times 8.4] = [3.36] = 3$$

تمرین ۲۲: برای کتابی که هر جمله آن به طور متوسط ۱۵ کلمه دارد و لغات دشوار هر جمله ۱۰ درصد است، پایه آموزش را بدست آورید.



تمرین ۲۳: اگر در کتابی شاخص پایه آموزش ۱۱ باشد و میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۱۵ باشد، چند درصد کلمات دشوار هستند؟

تمرین ۲۴: در کتابی که برای دانش آموزان پایه نهم مناسب است ۱۶ درصد کلمات آن سخت و دشوار است. باید میانگین تعداد کلمات در هر جمله آن چقدر باشد؟



درس ۲

سری های زمانه

نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب تر است؟

دمای هوای شهر محل زندگی مادر هفته آینده.

میزان آلاینده های شهر محل زندگی مادر ماه آینده.

نرخ یکاری در زمان اخذ دیپلم

آیا به نظر شما مجموعه ای از داده های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع آوری شده باشند، می توانند پیش بینی خوبی برای

تصمیم گیری ما باشند؟



تمرین ۲۵: میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر ۱ و ۲ بر حسب میلی متر در جدول زیر آمده است:

الف) جدول را کامل کنید.

شهر ۱	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
	۱۵	۲۰	۳۵	۴۰	۳۵	۳۵			
شهر ۲	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰			

$$\bar{x} = \frac{۱۵+۲۰+۳۵+۴۰+۳۵+۳۵}{۶} = \frac{۱۸۰}{۶} = ۳۰$$

$$\sigma^2 = \frac{(۱۵-۳۰)^2 + (۲۰-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2 + (۴۰-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2}{۶}$$

$$= \frac{۲۲۵+۱۰۰+۲۵+۱۰۰+۲۵+۲۵}{۶} = \frac{۵۰۰}{۶} \approx ۸۳/۳۳$$

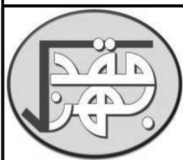
$$\sigma = \sqrt{۸۳/۳۳} \approx ۹/۱۲$$

$$\bar{x} = \frac{۲۳۰+۱۷۰+۱۵۰+۱۳۰+۱۱۰+۱۱۰}{۶} = \frac{۹۰۰}{۶} = ۱۵۰$$

$$\sigma^2 = \frac{(۲۳۰-۱۵۰)^2 + (۱۷۰-۱۵۰)^2 + (۱۵۰-۱۵۰)^2 + (۱۳۰-۱۵۰)^2 + (۱۱۰-۱۵۰)^2 + (۱۱۰-۱۵۰)^2}{۶}$$

$$= \frac{۶۴۰۰+۴۰۰+۰+۴۰۰+۱۶۰۰+۱۶۰۰}{۶} = \frac{۱۰۴۰۰}{۶} \approx ۱۷۳/۳۳ \quad \sigma = \sqrt{۱۷۳/۳۳} = ۴۱/۶۳$$

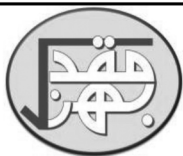
ب) میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.



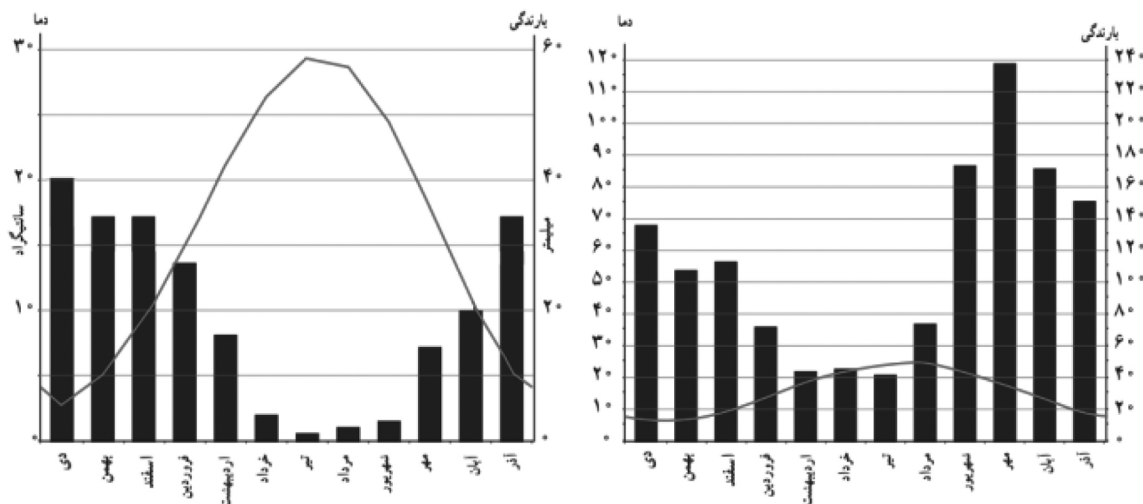
پ) نمودار پراکنش نگاشت هر دو شهر را بر حسب ماه های سال با یک مقیاس بر روی یک دستگاه مختصات رسم کنید. (نقاط را به هم وصل کنید)



حال نمودار پراکنش نگاشت دما و نمودار میله ای بارندگی های همان دو شهر را با مقیاس های متفاوت برای یک سال به ویژه در یک دستگاه مختصات رسم کرده ایم.



ریاضی و آمار ۲



(ت) در چه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟

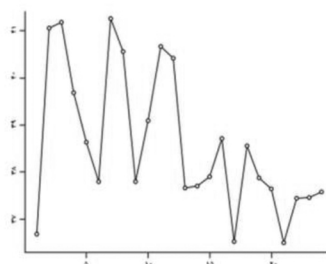
(ث) متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه های سال به همین نحو است؟

سری زمانی: مجموعه داده هایی در طی زمان با خواص منظم گردآوری می شوند.

نمودار سری زمانی: پراکنش نگاشت سری زمانی که داده ها را با پاره خط هایی در طول زمان به هم متصل می کند.

تمرین ۲۶: سری زمانی روبرو نشان دهنده ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده

درمانش با آنتی بیوتیک آغاز شده است.



(الف) هر روز چند درجه حرارت خوانده شده ثبت شده است؟



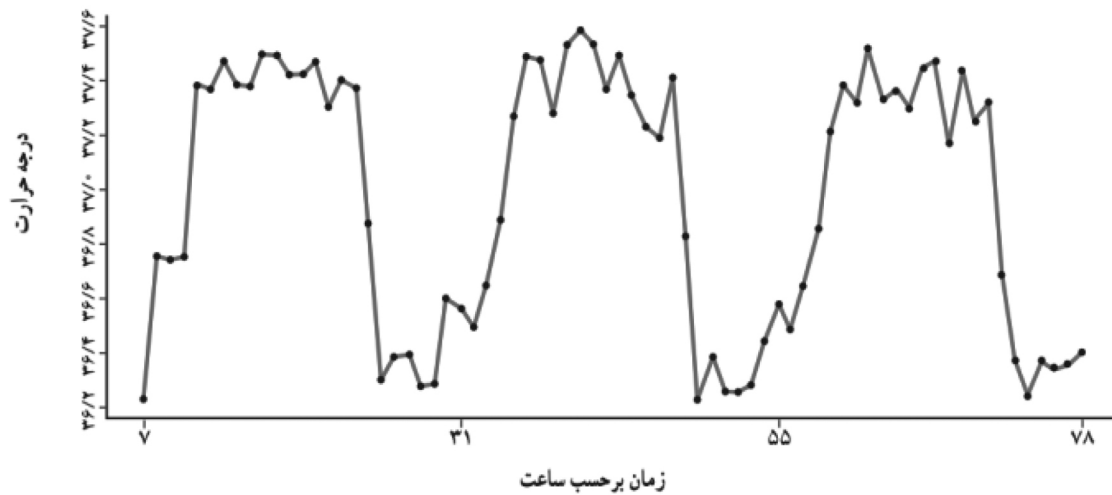
ب) درجه حرارت بیمار در لحظه بستری شدن چند درجه است؟

پ) پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟

ت) اگر اولین زمان ثبت درجه حرارت ساعت ۷ صبح، باشد نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده تر به نظر میرسد؟ کدام یک جزئیات بیشتری را نشان می دهد؟



تمرین ۲۷: درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه گیری شده است.



الف) بیشترین دمای بدن چقدر است؟

ب) با دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.

پ) آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟

ت) این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)



تکرار یک ویژگی را در سری سری زمانی الگو می نامند. از طریق این الگوها میتوانیم



اتفاقات و پدیده هایی را که در آینده رخ می دهد پیش بینی کنیم و یا وضعیت آن پدیده را در

گذشته هم بررسی کنیم.

در بعضی نمودارهای سری های زمانی یک شکل مرتب تکرار میشود. در این حالت سری



زمانی را متناوب می گویند.

تمرین ۲۸: کدام یک از داده های زیر سری زمانی است؟

الف) تعداد مراجعین یک عابر بانک مشخص در هر روز فروردین ۹۷

ب) قیمت سهام یک شرکت در روز اول هر ماه سال ۹۶

پ) زمان های رخ دادن تصادفات قطارها.

ت) میزان فروش یک مغازه در تمام هفته های زمستان یک سال



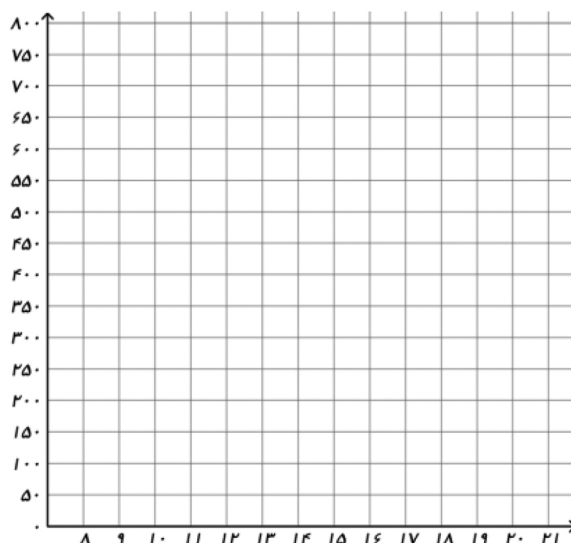
فصل ۳

درون یاب و برون یاب

تمرین ۲۵: در یک مرکز خرید تعداد مشتری های بین ساعت ۹ و ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

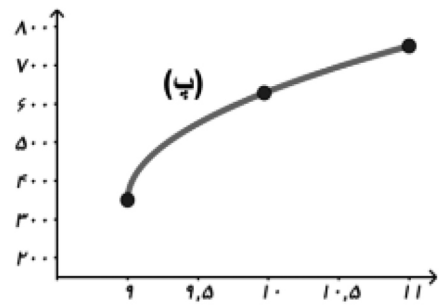
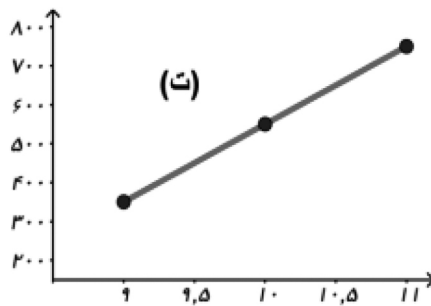
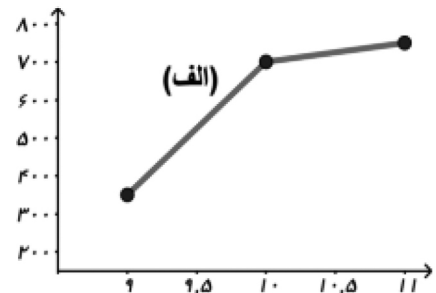
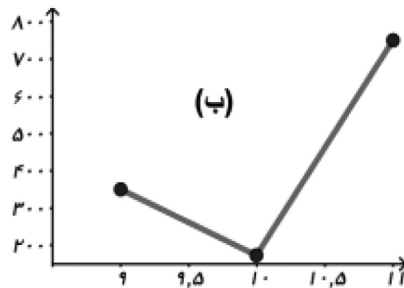
۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	ساعت (T)
۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰	تعداد مشتری (N)

الف) نمودار سری زمانی جدول بالا را رسم کنید.





ب) می خواهیم تعداد مشتری های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم، به نظر شما کدام یک از نمودارهای زیر واقعی تر است؟



درون یابی: تفمین داده های داده های ثبت شده است.

درون یابی که به وسیله پاره خط انجام شود، درون یابی خطی است.

خط: برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون یابی آن

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



تمرین ۲۶: می خواهیم تعداد مشتریهای ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون یابی کنیم فرض می کنیم تعداد مشتری ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

الف) معادله خط دو ساعت (۹،۳۵۰) و (۱۱،۷۵۰) را به دست آورید.

$$m = \frac{750 - 350}{11 - 9} = \frac{400}{2} = 200$$

$$y = 200(x - 9) + 350 \Rightarrow y = 200x - 1800 + 350 \Rightarrow y = 200x - 1450$$

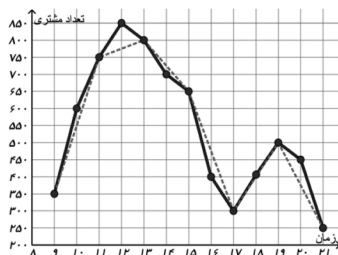
ب) مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟

$$y = 200(10) - 1450 = 2000 - 1450 = 550$$

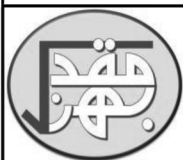
پ) این مقدار به درون یابی کدام یک از شکلهای فعالیت قبل نزدیک تر است؟

ت) اگر مقادیر داده های واقعی را به صورت ساعتی جمع آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است.

خطای درون یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟



$$E = |550 - 600| = |-50| = 50$$



ث) خطای درون یا بی ساعت ۱۶ چقدر است؟

تمرین ۲۷: فرض کنید مقادیر تابع f از به به صورت جدول زیر باشد مقدار تابع را در $x = 7$ ، با استفاده از درون یابی خطی تقریب بزنید.

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
$f(x)$	۱۱	۱۲	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹	۱۸

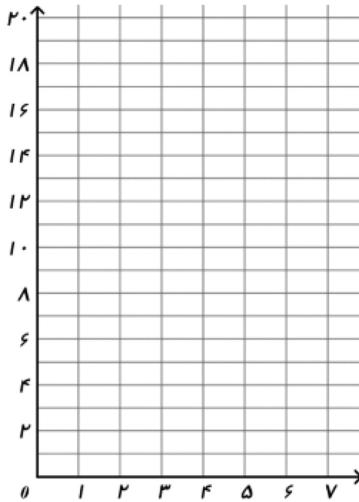
برون یابی: تفمین داده‌های بعد یا قبل از داده های ثبت شده است.

تمرین ۲۸: میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

سال x	۱	۲	۳	۴	۵
فروش y	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹



الف) نمودار سری زمانی جدول بالا را رسم کنید.

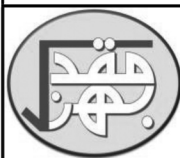


ب) فروش در سال هفتم را حدس بزنید.

پ) میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی محور نشان دهید.

ت) یک خط از نقطه میانگین ها به نقطه (۵، ۱۹) وصل کنید.

ث) معادله خط را به دست آورید.



ج) اگر به جای x تا در معادله، مقدار ۶ قرار دهید عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا میتوان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟

تمرین ۲۹: فرض کنید مقادیر تابع f به صورت جدول زیر باشد مقدار تابع را در $x = 17$ ، با استفاده از تابع برون تمرین یابی خطی تقریب بزنید.

تمرین ۳۰: فرض کنید جمعیت کشور در سالهای مختلف به صورت جدول زیر باشد:

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۰	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۵
جمعیت	۳۲ میلیون	۴۰ میلیون	۴۸ میلیون	۵۲ میلیون	؟	۶۵ میلیون	۷۰ میلیون	؟

الف) جمعیت کشور را در سال ۱۳۷۰ تخمین بزنید؟ (درون یابی)

ب) جمعیت کشور را در سال ۱۳۹۵ تخمین بزنید؟ (برون یابی)

قیمت: ۷۵۰۰۰ تومان