

تعریف گزاره:
حیر گزارهها: حروف راسخ p, q, r و اور $\sim$
ارزش راست $\rightarrow$ T $\rightarrow$ $True$
ارزش نادرست $\rightarrow$ F $\rightarrow$ $False$
نادرست

مفدا $\rightarrow$ گزاره ها ریاضی نداره $\leftarrow$ نیست
مفدا $\rightarrow$ تابع $\rightarrow$ هم $\leftarrow$ $2-7$
نادرست $\rightarrow$ آمار نمودارها متوالی $\leftarrow$ $1 \sim 3$
 $T \rightarrow 25$ مربع کامل است P

ریاضی و آمار ۲

جدول ارزش گزاره گزاره ها

p	q
$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$
$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$

p	q	r
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$

p	q	r	s
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\sim$	$\rightarrow$	$\rightarrow$

نمودار دینچه تبدیل $\leftarrow$
 $2^0 = 1$
 $2^1 = 2$
 $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$
 $2^4 = 16$
 $2^5 = 32$
 $2^6 = 64$
 $2^7 = 128$
 $2^8 = 256$

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$
 $2^6 = 64$ $2^7 = 128$ $2^8 = 256$

تعریف تقیض یک گزاره $\leftarrow$
 $p \equiv q$
 $\sim p \equiv \sim q$

گزاره
 p

تقیض گزاره
 $\sim p$

$p \equiv q$
 $\sim p \equiv \sim q$

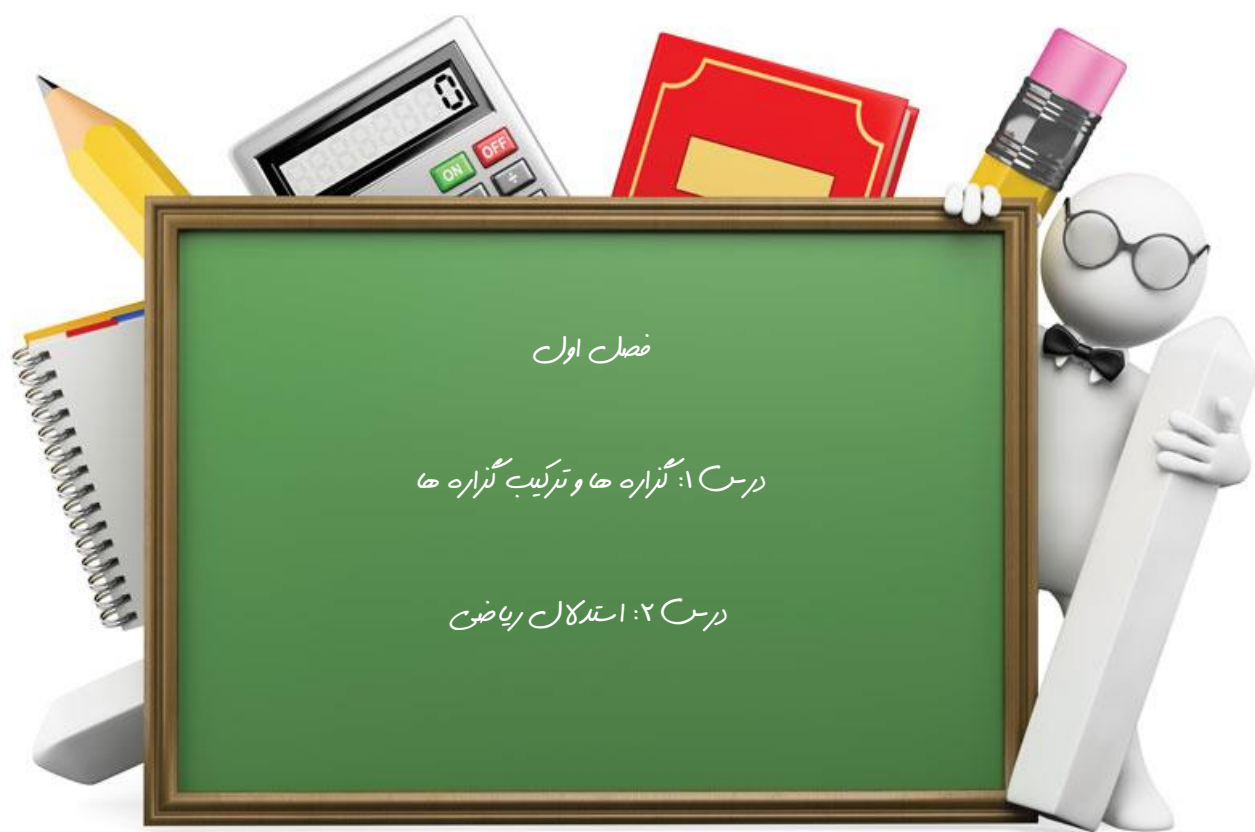
زیر مجموعه بودن $\subseteq$
 $\neq$
عدم مقابله $\nsubseteq$

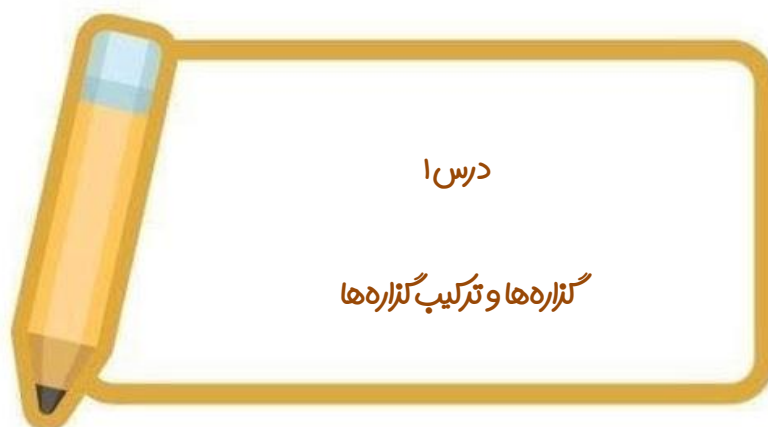
زیر مجموعه بودن $\subseteq$
 $\supset$
 $\supseteq$
عمومی $\in$

$p \equiv q$

$\sim p \equiv \sim q$

گزاره های هم ارز $\Leftarrow$





منطق در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شمارا با منطق ریاضی که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونه منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای اشتغال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت

F T



بدھیم، یک گزاره گفته می شود.

تمرین ۱: کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر یک را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟

ب) عدد ۲ عددی اول است.

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

ث) $2 + 3 \times 4 = 20$

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است ($n \in \mathbb{N}$).

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش مزه تر است. ← سلیقهای

ح) لطفاً تخته را پاک کن.

✓ گزاره نیست

گزاره درست

گزاره - ۴

گزاره - نادرست

گزاره - درست

نادرست

گزاره - نادرست

گزاره - نادرست

$$n=8 \Rightarrow (-1)^8 = +1$$

$$n=9 \Rightarrow (-1)^9 = -1$$

تمرین ۲: دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بنویسید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گزاره درست ۱:

گزاره درست ۲:

گزاره نادرست ۱:

گزاره نادرست ۲:

گزاره نباشد:

گزاره نباشد:



تمرین ۳: در سه جدول مقابل وضعیت ارزشی یک گزاره، دو گزاره و سه گزاره مشخص شده است. در جدول چهارم وضعیت ارزشی چهار گزاره را مشخص کنید.

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

p	q	r	s
د			
د			
د			
د			
د			
د			
د			
د			
د			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			
ن			

اگر یک گزاره پتان تغییر کند که ارزش آن تغییر کند، گویند نقیض گزاره نوشته شده است.

نقیض یک گزاره درست، گزاره ای نادرست و نقیض یک گزاره نادرست، گزاره ای درست

باشد. در واقع ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف آن گزاره است.

برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

گزاره p
نقیض گزاره p



مثال ۱: نقیض گزاره « ۲ زوج نیست. » می شود: « ۲ زوج است. »

مثال ۲: نقیض گزاره « a مثبت است. » می شود: « a مثبت نیست. »

به جدول زیر توجه کنید:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

تمرین ۴: ارزش گزاره زیر را بنویسید و سپس گزاره نقیض آن را بنویسید.

« عدد $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. »

حل: این گزاره درست است و هر یک از گزاره های زیر نقیض آن محسوب می شوند.

« $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست »

« عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. »

« چنین نیست که عدد $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. »

تمرین ۵: در هر یک از حالت های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۵ عددی زوج است.

ب) تساوی « $4 = 2 \times 2$ » برقرار است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک تر است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$



ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را باهم ترکیب و گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب، گزاره‌ها توسط رابط «و»، «یا»، «اگر»، «اگر و تنها اگر»، «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

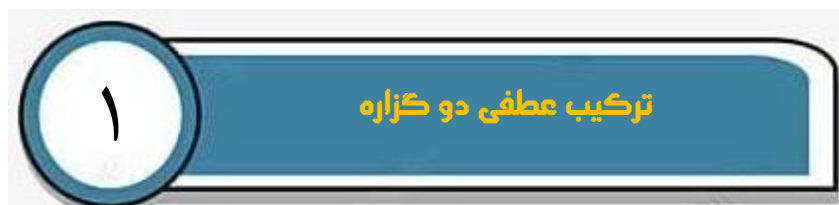
مثال ۱: «۵ عددی فردی است و ۴ عددی اول است.»

مثال ۲: «۱۲۱ مضرب ۱۲ یا مثبت $\sqrt{3}$ است.»

مثال ۳: «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوت حضرت رسول (ﷺ) را قبول دارم.»

مثال ۴: « n عددی زوج است. اگر و تنها n^2 اگر عددی زوج باشد.»

ارزش گزاره‌های ترکیبی به ارزش گزاره‌های ساده تشکیل دهنده آن‌ها و نوع رابط به کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد.





ترکیب عطفی

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد « $\wedge$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را

ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم « $p \wedge q$ » و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول روبرو تعیین می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن



مثال ۱: «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است.»

مثال ۲: «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است.»

ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره درست باشند و در غیر این صورت نادرست



است.

تمرین ۶: در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده‌شده ارزش آن‌ها را با علامت مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش

داده‌شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	✓	
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		✓
۳	۴۲ صبح با آن است. و زوج دارد.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و ۲ ربع است.	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		✓
۶	 و $5 > 2$ $3 < 1$	✓	





۲

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه بفواهیم دو گزاره p و q را با لفظ «یا» ترکیب کنیم، از نماد « $\vee$ » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم. ترکیب فصلی دو گزاره و آن را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم « $p \vee q$ » و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم.

مثال ۱: « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست».

مثال ۲: «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است».

ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول روبه‌رو تعیین می‌شود:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش **نادرست** است که هر دو گزاره نادرست باشند و در غیر این صورت **درست** است.



تمرین ۷: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است.		
۲	حضرت مهدی امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	

مسئله: جدول ارزش

را ثابت کنید؟ $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
ح	ح	ح	ح
ح	ن	ح	ح
ن	ح	ح	ن
ن	ن	ن	ن

۱ ← صحت ← وقتی حقیقت داشته باشد ← درست
 ۰ ← صحت ← وقتی جفت نداشته باشد ← نادرست

جدول ارزش گذاری عبارت

را ثابت کنید؟ $p \wedge (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \wedge (\neg p \vee q)$
ح	ح	ن	ن	ح	ح
ح	ن	ن	ح	ن	ن
ن	ح	ح	ن	ح	ن
ن	ن	ح	ح	ح	ن

ستون آخر جدول ارزش گذاری

را ثابت کنید؟ $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$
ح	ح	ح	ن	ن	ح	ن
ح	ن	ح	ن	ن	ن	ن
ن	ح	ح	ن	ح	ح	ن
ن	ن	ن	ح	ح	ن	ح

۰ ← صحت ← وقتی جفت نداشته باشد ← نادرست
 ۱ ← صحت ← وقتی حقیقت داشته باشد ← درست



✓		 یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.	۴
	✓	 یا	۵

if ← اگر
پس فتنه → نتیجه
اگر فتنه → نتیجه
اگر فتنه → نتیجه



$P \Rightarrow Q$
مقدم → متنت
مقدم → متنت

$P \Rightarrow Q$
مقدم → متنت
مقدم → متنت
مقدم → متنت

هرگاه بفواهیم از گزاره مانند p گزاره مانند q نتیجه بگیریم، از نماد « $\Rightarrow$ » استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب شرطی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \Rightarrow q$ »
در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » p را مقدم و q را متنت می‌نامیم.

به صورت زیر می‌خوانیم:

➤ «اگر p آنگاه q »

➤ « p نتیجه می‌دهد q را»

➤ « q از نتیجه می‌شود»

مثال ۱: «اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه مجموع آن دو عدد زوج است».

مثال ۲: «اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند».



عقبنی ۸ ← وقتی درست است که هر ۲ درست باشد
 یعنی ۷ = ۱ نادرست است که ۱ نادرست باشد
 ارزش گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

ترکیب شرطی و تالی نادرست است که
 تالی نادرست باشد

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط وقتی **نادرست** است که مقدم یعنی **p** درست و تالی یعنی **q** نادرست باشد و در غیر این صورت **درست** است.



وقتی ارزش مقدم **p نادرست** باشد، درست یا نادرست بودن تالی **q** تأثیری در ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ ندارد. در این صورت می گوییم به **انتفای مقدم** $p \Rightarrow q$ **درست** است.



ارزش این گزاره به **انتفای مقدم درست** است.

ارزش این گزاره به **انتفای مقدم درست** است.

ارزش این گزاره **درست** است.

مثال ۱: «اگر $3^2 = 6$ آنگاه ۵ عددی اول است.»

مثال ۲: «اگر ۸ عدد فرد است آنگاه $2 > 4$ »

مثال ۳: «اگر $4^2 = 2^4$ آنگاه $3^2 > 2^3$ »

تمرین ۸: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است. آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است. آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است. آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه		
۵	اگر آنگاه		
۶	اگر ۷ فرد است. آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.		



تمرین ۹: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید.

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge \text{ف}$

تاریف درست

$(p \Rightarrow q) \wedge \text{ف}$	p	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \wedge \text{ف}$
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن

ب) $(p \vee q) \wedge \text{ف}$

p	q	$p \vee q$	r	$(q \Rightarrow p) \wedge r$
د	ن	د	د	د
د	ن	د	ن	ن

$(p \vee q) \vee r$
 د ن ؟
 د
 د

حل: روش اول

روش دوم

پ) $(p \Rightarrow q) \wedge \text{ف}$

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$(p \Rightarrow q) \wedge \text{ف}$
ن	د			
ن	د			

حل:

ت) $(r \Rightarrow p) \vee q$

حل

ث) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

حل





$$\text{ج) } (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

حل

$$\text{چ) } (p \wedge q) \Rightarrow r$$

حل



هرگاه بفواهیم از گزاره مانند p گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره مانند q گزاره p را نتیجه بگیریم، از نماد « $\Leftrightarrow$ »

استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب شرطی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم: « $p \Leftrightarrow q$ ».

در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

$$p \Rightarrow q \text{ if } p \text{ is true}$$

$$p \Leftrightarrow q \text{ if } p \text{ is true}$$

$p \Leftrightarrow q$ را به صورت زیر می‌خوانیم:

➤ «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p »

➤ « p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»

➤ «اگر p آنگاه q و برعکس»

➤ « p شرط لازم و کافی است برای q نتیجه می‌شود»





➤ «اگر و تنها اگر q»

مثال ۱: «۹۹ عددی اول نیست اگر و تنها اگر ۱۱ عددی اول باشد.»

مثال ۲: «اگر عددی بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد آنگاه آن عدد ۶ بر بخش پذیر است و برعکس»

ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ وقتی **درست** است که مقدم (p) و تالی (q) هر دو درست یا هر دو نادرست باشند و در غیر این صورت **نادرست** است.



تمرین ۱۰: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است. آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	 اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.		
۴	اگر آنگاه و برعکس		
۵	اگر چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس.		

مركب: اولی و غیر اولی است
مركب: اولی و غیر اولی است

مکته اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.





تمرین ۱۱: اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

الف) $(q \Leftrightarrow p) \wedge r$

q	p	$q \Leftrightarrow p$	r	$(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge r$
ن	د	ن	د	ن
ن	د	ن	ن	ن

حل: روش اول $\underbrace{\begin{pmatrix} q \Leftrightarrow p \\ \text{د} \quad \text{ن} \end{pmatrix}}_{\text{ن}} \wedge r$ روش دوم

ب) $(\sim q \Leftrightarrow p) \vee r$

p	$\sim p$	q	$\sim p \Leftrightarrow q$	r	$(\sim q \Leftrightarrow p) \vee r$
د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د

حل:

پ) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

q	p	$p \Leftrightarrow q$	$q \Leftrightarrow p$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
ن	د			
ن	د			

حل:



$$p \mid \sim p \mid q \mid \sim p \vee q \mid p \Rightarrow q \mid (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

ت) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

حل

ث) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

حل

ج) $(r \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

حل:

چ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

حل:



تمرین ۱۲: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	

حل:

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	
ن	ن	د	د	د	

حل

گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را **عکس نقیض** گزاره $p \Rightarrow q$ می‌نامیم.





پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim q \wedge \sim p)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim q \wedge \sim p$
د	د	ن	ن		ن
د	ن	ن		د	
ن	د	د		د	
ن	ن	د			د

حل

این قانون باهم ارزی؛ یعنی $\sim(p \vee q) \equiv (\sim q \wedge \sim p)$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim q \vee \sim p)$ به قوانین دومرگان معروف اند.



ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	

حل:

ث) $(p \vee \sim p) = T$

p	q	$p \vee \sim p$
د	ن	د
ن	د	د

حل:



ج) $(p \wedge \sim p) = F$

p	q	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

حل:

گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.



تمرین ۱۲: با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید: $(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$



درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید.

در این درس ابتدا به نحوه تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم.

در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

تمرین ۱۳: عبارت «ما و ما نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم.» را به صورت نماد

ریاضی بازنویسی کنید و سپس آن را حل کنید.

حل: $11x + 4 = 100$

$x =$ تعداد

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$



$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100 \xrightarrow{\times 4} 4x + 4x + \frac{4}{2}x + \frac{4}{4}x + 4 = 400$$

$$11x = 400 - 4 \Rightarrow 11x = 396 \Rightarrow x = \frac{396}{11} \Rightarrow x = 36$$

تمرین ۱۴: به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصه تألیف شیخ بهایی، انتخاب شده است، توجه کنید: « عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد.» را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید و سپس آن را حل کنید.

حل:

$$x \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 12 = 5x$$

تعداد = x

$$x \times \left(\frac{1}{2}x\right) + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 12 = 5x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 5x + 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-6) = 0 \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

تمرین ۱۵: عبارت « ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به صورت نماد ریاضی بیان کنید.

حل:

قیمت خرید آن کالا = y قیمت فروش آن کالا = x

$$x - y = \text{قیمت خرید آن کالا} - \text{قیمت فروش آن کالا} = \text{سود}$$

$$\frac{10}{100}x = x - y$$

تمرین ۱۶: عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگ تر از خودش است.

$$x + 5 = 2x$$

$$x \times y = x + y$$

$$x \times (x + 3) > x$$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z}$ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}$ اعداد گویا (کسری): $\mathbb{Q}$ اعداد حقیقی (رئال): $\mathbb{R}$ اعداد حقیقی: $\mathbb{R}$

تمرین ۱۷: عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

$$x + 5 = 2x$$

الف) عددی به علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.

$$x, y \in \mathbb{R} \rightarrow x \times y = x + y$$

ب) حاصل ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

$$(x \times x) + 3 > x \rightarrow x^2 + 3 > x$$

پ) حاصل ضرب عددی در خودش به علاوه ۳، بزرگتر از خودش است.



دلیل آوردن برای اثبات یک حکم را استدلال گویند.

به زبان هاورایی که برای حکم ها
بی آوریم استدلال می نویسیم.

نکته

یکی از انواع قیاس ها که در استدلال ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است.

$$\begin{array}{l} \text{فرض مقدم} \\ \uparrow \\ \text{نتیجه} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{تایید} \\ \rightarrow \\ \text{مقدم} \end{array}$$
$$p \Rightarrow q$$
$$p \dots$$
$$q \dots$$

در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می کنیم.

مقدمه ۱: اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب شب چهاردهم ماه باشد.

نتیجه: ماه کامل است.

استدلال بالا را می توان به طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

ب.

و یا با استفاده از نمادگذاری های درس قبل داریم:

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

رابطه زیر را می توانیم به روشی دیگر اثبات کنیم

روش دیگر اثبات رابطه فوقانی مقدمه ۲

رابطه زیر را می آوریم نتیجه



تمرین ۱۸: در هر یک از استدلال‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

الف) اگر یاسمن کتاب داشته باشد، آن را می‌خواند.

دوست یاسمن، به او یک کتاب داده است

نتیجه: **یاسمن کتاب می‌خواند**

ب) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند استدلال کنند.

حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

نتیجه: **حمید می‌تواند استدلال کند**



گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این‌گونه استدلالات، مغالطه می‌گویند. در زیر مثالی از این نوع پرداخته شده است.



مثال ۱: اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود.

زمین خیس شده است.

∴ باران باریده است.

در استدلال فوق طبق قیاس استثنایی، مقدمه دوم باید p باشد و نه q ، پس استدلال فوق نادرست است. (زمین می‌تواند

به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد).

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

تمرین ۱۹: با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعده قیاس استثنایی $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ را نشان دهید.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د



تمرین ۲۰: در هر یک از استدلال‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

$$p: 3 > 0 \Rightarrow 4 > 1$$

$$p: 3 > 0$$

نتیجه $\therefore 4 > 1$

مقدمه
مقدار

خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ $q \Rightarrow$ خطوط L_1 و موازی L_2 باشند.

خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

$\therefore L_1 \parallel L_2$

تمرین ۲۱: آیا نتایج زیر از عبارت داده‌شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$\text{الف } x^2 > 0$$

$$\therefore x > 0$$

چهارضلعی لوزی است؛ $q \Rightarrow$ چهارضلعی مربع است

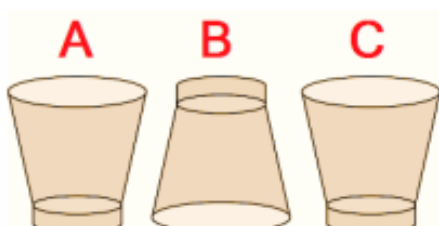
چهارضلعی لوزی است.

چهارضلعی مربع است؛ $\therefore$

تمرین ۲۲: سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آن‌ها وارونه است. می‌خواهیم همه آن‌ها در حالت درست (رو به

بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم. سؤال این است که آیا این کار

امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!



حل

تعداد لیوان‌های وارونه $s =$

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است) $s = 1$





وضعیت مطلوب (یک لیوان وارونه است) $s=0$

حرکت مجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



تمرین ۲۳: تمرین سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟



حل:

راه حل اول:

$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$
 $A \quad B \quad C \xrightarrow{\text{تغییر } A, C} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $A \quad B \quad C$

راه حل دوم:

$\downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow$
 $A \quad B \quad C \xrightarrow{\text{تغییر } A, B} \uparrow \quad \downarrow \quad \downarrow \xrightarrow{\text{تغییر } B, C} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $A \quad B \quad C$

راه حل سوم:



$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ A & B & C \end{array} \xrightarrow{\text{تغییر } B, C} \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \uparrow \\ A & B & C \end{array} \xrightarrow{\text{تغییر } A, B} \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & B & C \end{array}$$

تمرین ۲۴: تمرین سه لیوان را برای حالتی که بیش از لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟
حل:

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C & D \end{array} \xrightarrow{\text{تغییر } A, C} \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ A & B & C & D \end{array} \xrightarrow{\text{تغییر } D, C} \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ A & B & C & D \end{array}$$

$S=3 \qquad S=1 \qquad S=1$

هر بار با تغییر حالت دو لیوان مقدار S برابر ۱ باقی می ماند. مطلوب آن است که $S=0$ شود. با این استدلال معلوم می شود که حالت $S=0$ به دست نمی آید لذا مسئله جواب ندارد.

مقدمه ۱- جمله شرطی یارو
مقدمه ۲- فرض جمله شرطی
نتیجه ۳- حکم جمله شرطی

عکس نقیض

$$\boxed{x=0 \text{ و } y}$$

نما در این عبارت فلاس

عبارت فارسی	نماد ریاضی
دو برابر عدد	$2x$
لصف عدد	$\frac{1}{x}$
مکعب عدد	$\frac{1}{x^3}$
مربع عدد	x^2
مکعب عدد	x^3
جذر عدد	$\sqrt{x}$
ریشه n ام عدد	$\sqrt[n]{x}$

اگر بفواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می توان « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » ثابت کرد درست است. در این حالت می گوییم عکس نقیض گزاره اصلی را ثابت می کنیم.

حاصلضرب دو عدد	$x \times y$
مکس عدد	$\frac{1}{x}$
قدر مطلق عدد	$ x $
بزرگتر از	$x > a$
کوچتر مساوی	$x \leq a$
مکس مجموع دو عدد	$\frac{1}{x+y}$
مجموع معکوس دو عدد	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

تقریب حکم = n فرد
 n^2 فرد

مثال: ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است» ($n \in \mathbb{Z}$).

اثبات: عکس نقیض آن را ثابت می کنیم یعنی ثابت می کنیم «اگر n فرد باشد آنگاه n^2 فرد است» ($n \in \mathbb{Z}$).

$$2R = 2K = 2R = 2K$$

$$2n+1 = 2K+1 = 2K+1$$



$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2 \left(\underbrace{2k^2 + 2k}_m \right) + 1 = 2m + 1 \Rightarrow n^2 \text{ فرد است}$$

تمرین ۲۵: ثابت کنید «اگر $x + y > 5$ آنگاه $x > 2$ یا $y > 3$ ».

اثبات: عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم یعنی ثابت می‌کنیم «اگر $x \leq 2$ یا $y \leq 3$ آنگاه $x + y \leq 5$ فرد است».

به عبارت دیگر: «اگر $x \leq 2$ یا $y \leq 3$ آنگاه $x + y \leq 5$ فرد است»

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

$$x + y \leq 2 + 3 \Rightarrow x + y \leq 5$$

تمرین ۲۶: ثابت کنید «اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$ ».

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار فضا می‌شویم. یافتن فضا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم

است. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. ← ریاضی



مثال: دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادله $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = 1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \frac{0}{x}$$

$$x - 1 = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

تجزیه معادله

تقسیم طرفین بر x و ساده‌سازی

حاصل ساده‌سازی و تبدیل به معادله ساده‌تر



$$x = 1$$

جواب معادله

ایراد این استدلال: در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی معنی می شود.

تمرین ۲۷: دانش آموزی گزاره « $a < b \Rightarrow ac < bc$ » را که a ، b و c اعداد حقیقی اند، به صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

حل:

$$a < b$$

$$a + c, b + c$$

$$c(a + c) < c(b + c)$$

$$ac + c^2 < bc + c^2$$

$$ac + c^2 < bc + c^2$$

طرفین را با c جمع می کنیم.طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می کنیم. c را در پرانتزها ضرب می کنیم.

چون عددی همواره مثبت است، می توان آن را از طرفین کم کرد.



تمرین ۲۸: سؤال زیر در یک امتحان داده شده است.

اگر $a = \frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است d ($a \neq 1$)

استدلال‌های زیر را برای به دست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش آموزان آورده‌ایم.

کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

(الف)

$$a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$1 \quad 0 = \frac{-d}{c-d}$$

$$0 = -d$$

$$d = 0$$

درست

$$\frac{a}{b} = 0 \rightarrow a = 0$$

درست

$$\begin{aligned} a + 9 &= 9 + 7 \\ a - 9 &= 7 - 9 \end{aligned}$$

(ب)

$$1 \text{ مرحله} \rightarrow a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$2 \text{ مرحله} \rightarrow ac - ad = a - d$$

$$3 \text{ مرحله} \rightarrow ac - a = ad - d$$

$$4 \text{ مرحله} \rightarrow a(c-1) = (a-1)d$$

$$5 \text{ مرحله} \rightarrow \frac{a(c-1)}{a-1} = d$$

$$6 \text{ مرحله} \rightarrow -(c-1) = d$$

درست

$$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$$

درست

فاکتورگیری

$$a = 5 \quad c = 2 \quad d = 7$$

$$\frac{a(c-1)}{a-1} = \frac{5(2-1)}{5-1} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{2+7}{4}$$

(پ)

$$a = \frac{a-d}{c-d}$$

$$a(c-d) = a-d \rightarrow T$$

$$ac - ad = a - d \rightarrow T$$



$$ac - a = ad - d \rightarrow T$$

$$ac - a = (a-1)d \rightarrow T$$

$$\frac{a(c-1)}{a-1} = d \rightarrow T$$

تمرین ۲۹: فرض کنید است، دانش آموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x=1 \rightarrow T$$

$$x^2 = x \rightarrow F$$

$$x^2(-1) = x(-1) \rightarrow T$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \rightarrow T$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \rightarrow T$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 \rightarrow T$$

$$x+1=1 \rightarrow T$$

$$x=2 \rightarrow F$$

$$1=2 \rightarrow F$$