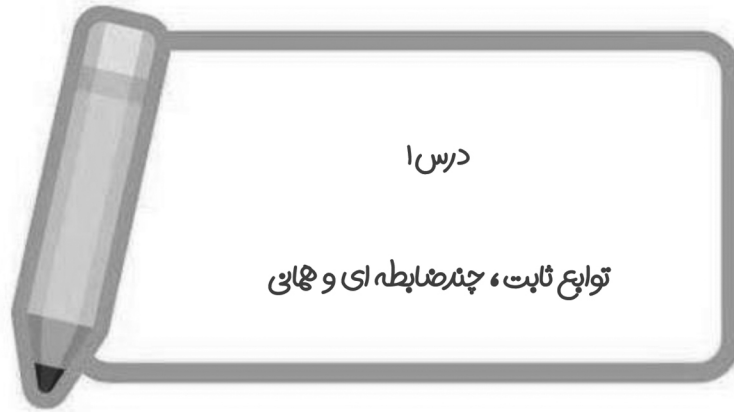


ریاضے و آمار ۲

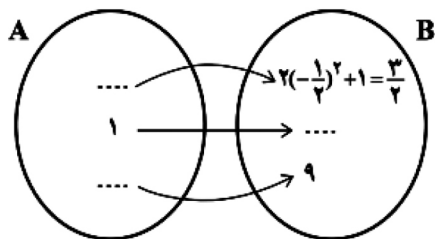




در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدید

تمرین ۱: اگر $A = \{-\frac{1}{2}, 1, 2\}$ و $f(x) = \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{cases}$ باشد، با توجه به نمایش‌های مختلف تابع قسمت‌های زیر را کامل کنید.

(الف) در نمایش یکانی با توجه به ضابطه f و مجموعه A داریم:



بنابراین برد f مجموعه $B = \{ \quad , \quad , \quad \}$ است. نمایش یکانی رابطه فوق بیانگر یک

زیرا از هر عضو مجموعه A ، دقیقاً خارج شده است.

(ب) نمایش زوجی مرتبی آن به صورت زیر است:

$$f = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right), (1, 1), (2, 9) \right\}$$

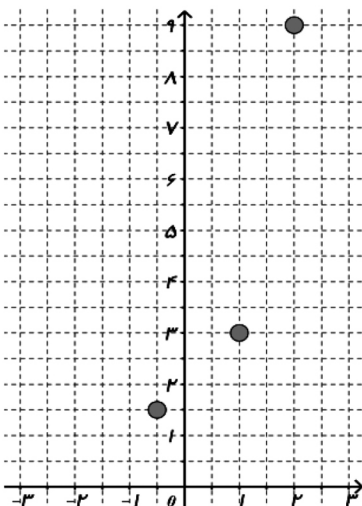
$$D_f = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \right\} \text{ و } R_f = \left\{ \frac{3}{4}, 1, 9 \right\}$$

مجموعه‌های D_f و R_f دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهد.

(پ) نمایش مختصاتی آن نیز چنین است؛ تصویر این نقاط بر روی

محور x ها؛ یعنی $\{ -\frac{1}{2}, 1, 2 \}$ دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور y ها $\{ \frac{3}{4}, 1, 9 \}$ برد تابع

نامیده می‌شود.



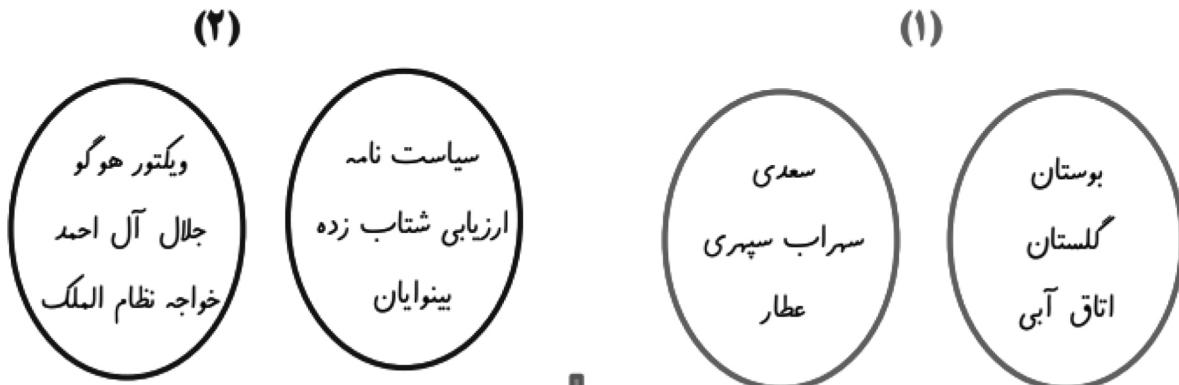


تمرین ۲: ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه خواسته شده را کامل کنید.

الف) رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

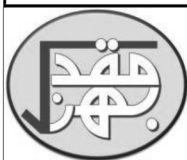


ب) رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



تمرین ۳: حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌های تمرین قبل که تابع هستند، کامل کنید.

نمایش جدولی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
الف		



		ب
--	--	---

با توجه به جدول بالا:

نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که.....

انواع توابع (ثابت، چندضابطه ای و همانی)

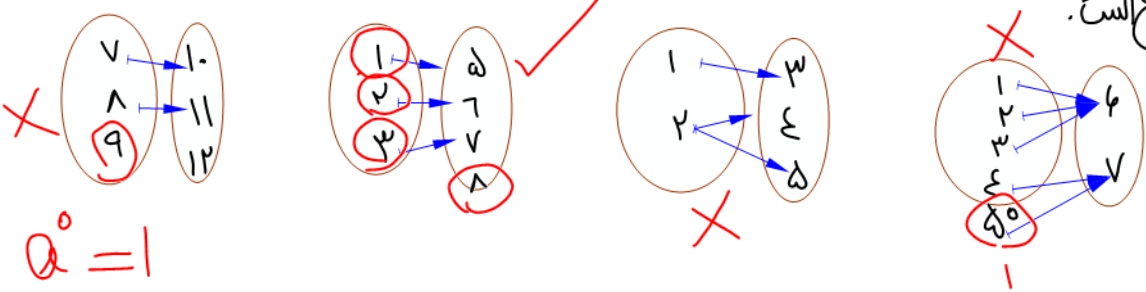
یکی از کاربردهای تابع، «مدل سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

دیران یک فروشگاه به دلایلی تصمیم گرفته اند هزینه استفاده از فروشگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند.

پیش از این، هزینه استفاده از فروشگاه ثابت بوده است. (مستقل از ساعت و روز هفته).

حل نیست تابع: کدام را تابع است؟

از نمودار بیانی تابع آن است
نه از هر عنصر دامنه فقط یک
بشماره خارج شود



$Q^0 = 1$

لیست ۴۲۰ ← برد تابع $f(x) = x^2 - 3$ برابر است با $R_f = \{0, 1, 2\}$ مجموع تمام اعضای دامنه

$0 = x^2 - 3 \rightarrow x = \sqrt{3} \rightarrow x = -\sqrt{3}$
 $1 = x^2 - 3 \rightarrow x = 2 \rightarrow x = -2$
 $2 = x^2 - 3 \rightarrow x = \sqrt{5} \rightarrow x = -\sqrt{5}$

$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + 2 + (-2) + \sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$

لیست ۴۲۶ ← اگر $f(x) = (2k-6)x + 10k$ ثابت باشد حاصل $f(-1)$ کدام است؟

$f(x) = k$ (ثابت)

$2k-6=0 \rightarrow 2k=6 \rightarrow k=3$
 $f(x) = 3$

- ۳۰
- ۴۰
- ۱۸
- ۲۸

$D_f = \{1, 2, 10\}$

لیست ۴۲۷ ← $f = \{(1, 4), (2, 4), (10, 4)\}$ ثابت باشد حاصل مجموع تمام اعضای دامنه و برد

$\frac{4}{1} = \frac{4}{2} = \frac{4}{10} \rightarrow y=1$
 $x-4=4 \rightarrow x=8$

$f = \{(1, 4), (2, 4), (10, 4)\}$

$\frac{1+8+2+10}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$

- ۶
- ۷
- ۱
- ۹

لیست ۴۴۱ ← تابع $f = \{(t, 1), (m^2, 4), (n^3, 1)\}$ حاصل $m^4 - 3n + t^4$

$(2)^4 - 3(2) + (1)^4$
 $16 - 6 + 1 = 11$

$t=1$
 $n=2$
 $m^2=4 \rightarrow m=+2 \rightarrow m=-2$

- ۱۰
- ۱۱
- ۱۲
- ۱۳

لست $\varepsilon^3 \leftarrow$ اگر

$$\frac{K \times m}{t} = \frac{t \times (-\varepsilon)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$K + 3 = -\varepsilon \rightarrow K = -4$$

$$\frac{m}{2} - 1 = -\varepsilon$$

$$\frac{m}{2} = -\varepsilon + 1 \rightarrow \frac{m}{2} = -2 + 1 \rightarrow m = -2$$

$$t^2 - \varepsilon t = -\varepsilon$$

$$t^2 - \varepsilon t + \varepsilon = 0$$

$$(t - 2)^2 = 0 \rightarrow t = 2$$



برای اجرای این تقسیم ابتدا به کمک دوربین های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفته هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از اجدول روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول زیر نمایش داده شده است:

ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	ساعت	روز
اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم	
۸-۹	۹-۱۰	۱۰-۱۱	۱۱-۱۲	۱۲-۱۳	۱۳-۱۴	۱۴-۱۵	۱۵-۱۶	۱۶-۱۷	۱۷-۱۸	۱۸-۱۹	۱۹-۲۰	
۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰	شنبه
۱۱	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰	یکشنبه
۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۵۰	دوشنبه
۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰	سه شنبه
۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰	چهارشنبه
۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۴۰	۶۱۰	۷۴۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰	پنجشنبه
۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۴۰	۴۱۰	جمعه

با در نظر گرفتن جدول صفحه قبل، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول زیر تعیین شده است:



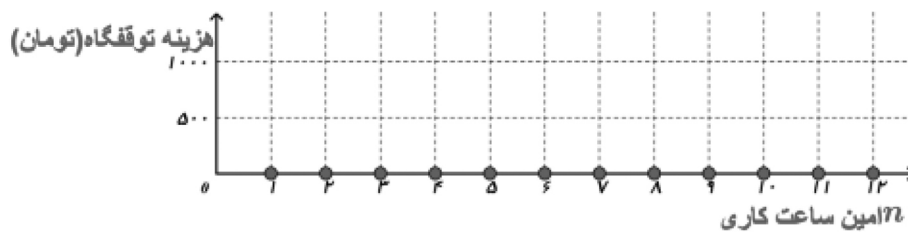
جدول ۲

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
۰-۱۰۰	رایگان
۱۰۰-۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰-۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰-۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰-۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰-۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰-۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

تابع ثابت

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار « n امین ساعت کاری فروشگاه - هزینه دریافتی» را برای روز شنبه در

نخستین هفته هوشمند سازی رسم می کنیم.

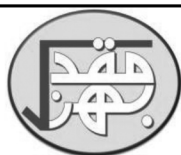


این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=2$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است؛ تابع

ثابت نامیده می شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به صورت $C: A \rightarrow B$ است که در آن $D_C = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 12\}$ و $C(n) = 0$.

دامنه تابع و $R_C = \{0\}$ برد تابع C را تشکیل می دهند.





تمرین ۴: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی در جدول ۲ نمودار زیر را برای روز یکشنبه کامل کنید.

تابع را که در آن مجموعه برد تابع است، تابع ثابت می نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است

تمرین ۵: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲ نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید.

لست

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$1 + 9 + 74 = 84$$

x	(1)	$\epsilon b - 7$	$\frac{c}{2}$	(35)
y	$(2a-1)$	(5)	$a+b$	(35)

$2a-1=1 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$
 $\epsilon b - 7 = 5 \Rightarrow \epsilon b = 12 \Rightarrow b=3$
 $\frac{c}{2} = 35 \Rightarrow c=70$

$C=70$
 81
 92



الف) جاهای خالی را کامل کنید.

ب) دامنه روز دوشنبه چه تفاوت‌هایی با دامنه نمودار در روز شنبه و یکشنبه دارد؟

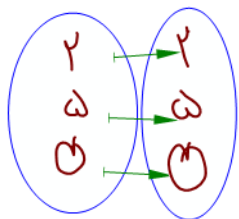
$$\begin{cases} C : AB \\ Cx = \end{cases}$$

$$R_C = \{ \quad \}$$

$$D_C \{x \in \mathbb{R} \mid \quad \}$$

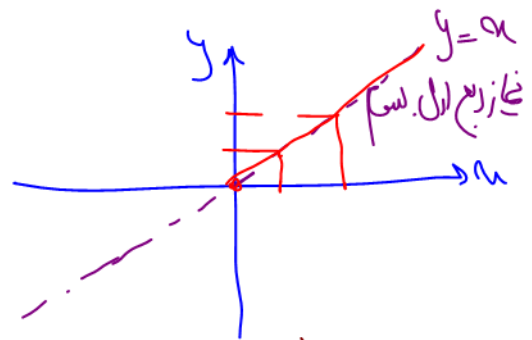
پ) تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

$$f = \{(2, 2)(5, 5)(-1, -1)(7, 7)(6, 6)\}$$



$$f(x) = x \quad \text{خطی}$$

$$f(x) = x \rightarrow y = x$$

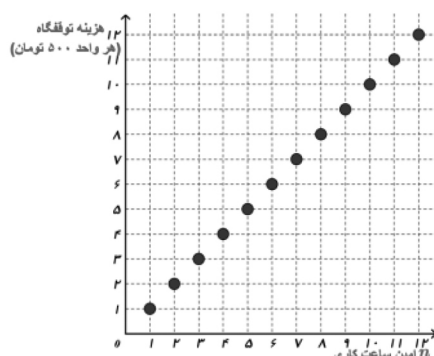
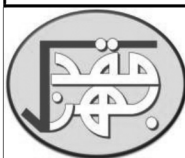


تابعی که هزینه‌های مکان دارد

$$\begin{array}{r|rrrrrr} x & 2 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \\ \hline y & 2 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \end{array}$$

تابع همانه = همونه

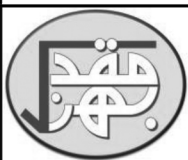
تمرین ۱۴: برای روز پنج‌شنبه به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در n امین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی n واحد هر واحد ۵۰۰ تومان باشد بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:



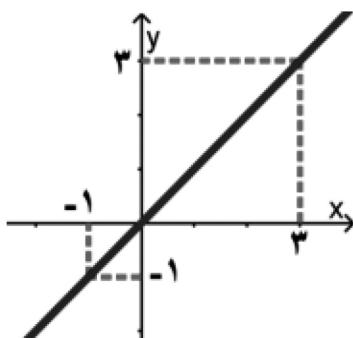
الف) مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟

ب) اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آنچه تغییری می‌کند؟

تابع با ضابطه $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره
با یکدیگر برابرند. $R_f = \mathbb{R} . D_f = \mathbb{R}$

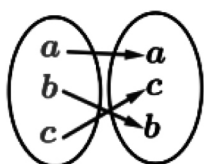
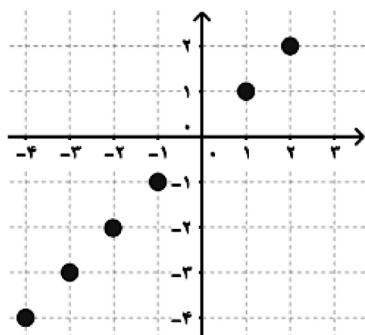


از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.



تمرین ۱۵: نمونه‌هایی از توابع همانی در اینجا ارائه شده‌اند، دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

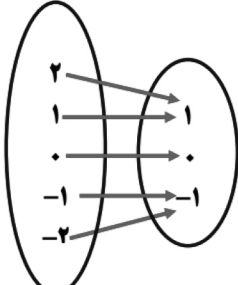
x	-۱	-۰/۳	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$
y	-۱	-۰/۳	۰	$\frac{۴}{۷}$	۲	$\sqrt{۱۳}$



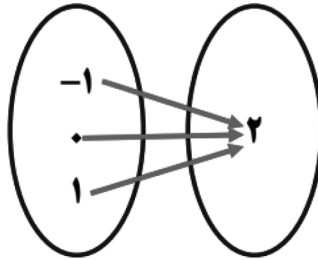
تمرین ۱۶: نوع هر یک از توابع زیر را مشخص کنید. (ثابت، همانی، چند ضابطه‌ای)



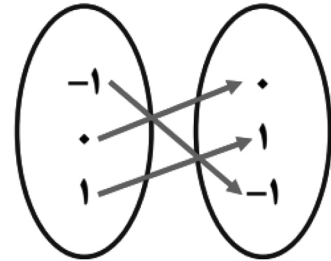
ب



ب



الف



لیست ← اگر نمودار روین تابع باشد یا نه؟
 الف) $\{0, 1, 2\}$
 ب) $\{4, 5, 7\}$
 ج) $\{4, 5, 8\}$
 د) $\{4, 8, 20\}$

$f = \{(0, 5), (1, 4), (2, 7), (m+8, n+1)\}$
 $m-2=4 \Rightarrow m=6$
 $n+1=7 \Rightarrow n=6$
 $R_f = \{4, 5, 7, 8\}$

لیست ← اگر
 $f = \{(1, 4), (2, 4), (10, 4)\}$
 $f_y = f_x \Rightarrow y=1$
 $x-y=4 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$
 $f: \{(1, 4), (2, 4), (10, 4)\}$
 $1+4+2+10 = \frac{17}{4}$

تابع چندضابطه‌ای: (قطعاتی)
 محدوده تعریف شده
 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 2 \\ x & -1 < x < 2 \\ -5x^2-4 & x < -1 \end{cases}$
 $f(x) = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{cases}$
 $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3$
 $f(4) = 9$
 $f(-3) = -51$

دلیل / فرض کنیم ۲۹ آبان ۱۴۰۳

سوال ۱- اگر $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$f(2) = 5$$

$$f(0) = 0$$

$$f(5) = 5$$

$$f(-4) = -4$$

$$\underbrace{f(4)}_5 + \underbrace{f(-1)}_1 = 6$$

سوال ۱- اگر $f(x) = \begin{cases} a^2 + x & x > 1 \\ -2ax & x \leq 1 \end{cases}$ تابع باشد حاصل $f(2) + f(-1)$ کدام است:

$a^2 + 1 = -2a \rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0$

$(a+1)^2 = 0 \rightarrow a+1=0 \rightarrow a=-1$

$f(x) = \begin{cases} 1+x & x > 1 \\ 2x & x \leq 1 \end{cases}$

تابع به تابع داده شده مقادیر زیر را بدست آورید:

$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 0 \\ -3 & 0 < x \leq 2 \\ 2x^2 & x > 2 \end{cases}$

$\sqrt{2} \approx 1.4$
 $\sqrt{3} \approx 1.7$
 $\sqrt{4} = 2$
 $\sqrt{5} \approx 2.2$
 $\sqrt{6} \approx 2.4$
 $\sqrt{7} \approx 2.6$
 $\sqrt{8} \approx 2.8$
 $\sqrt{9} = 3$
 $\sqrt{10} \approx 3.1$

$f(-3) = 2(-3) - 1 = -7$

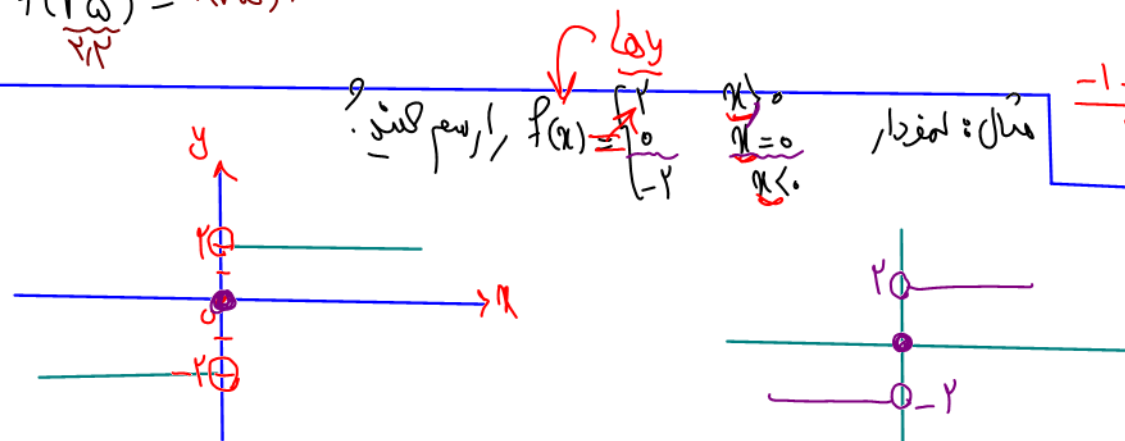
$f(\sqrt{2}) = -3$

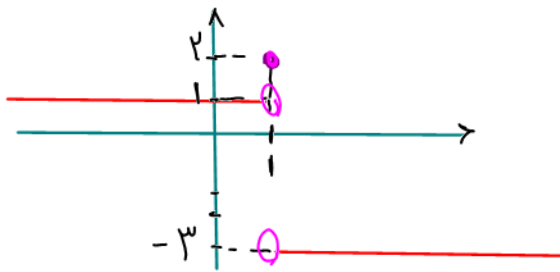
$f(\sqrt{5}) = 2(\sqrt{5})^2 = 2(5) = 10$

$f(3) = 2(3)^2 = 18$

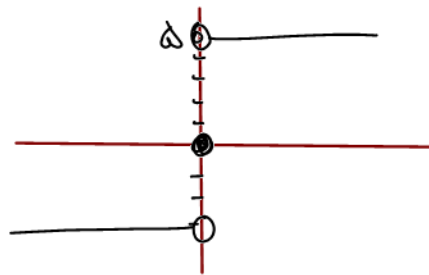
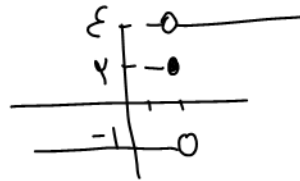
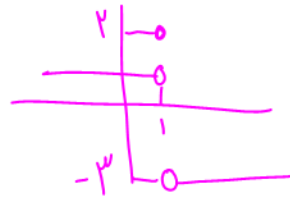
$f(\frac{1}{2}) = -3$

$f(\frac{1}{\epsilon}) = 2(\frac{1}{\epsilon})^2 - 1$



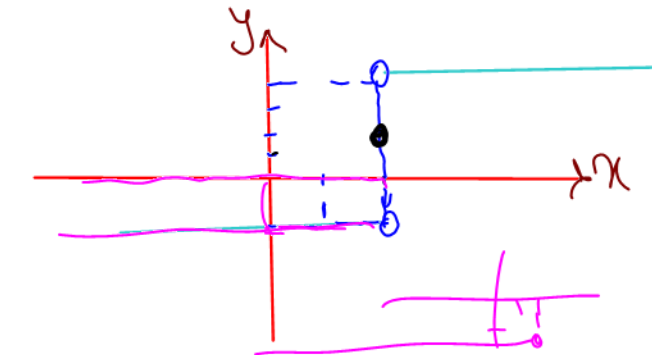


$$f(x) = \begin{cases} -3 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ +1 & x < 1 \end{cases}$$

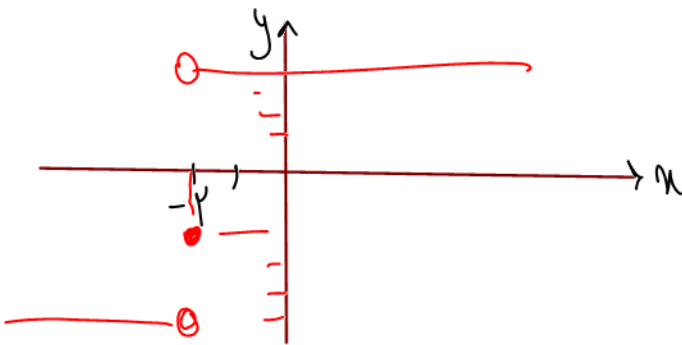


$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ -3 & x < 0 \end{cases}$$



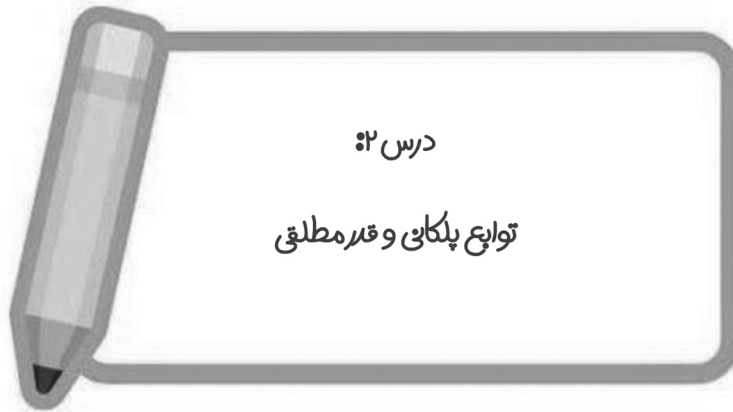
$$f(x) = \begin{cases} 3 & x > -1 \\ -1 & x = -1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$$





دوبنه ۹، ۱۴ ← آزمون تعیین کننده
کتابه ۱۰، ۹ ← احکامات درم

در جدول به نایب می - هزینه بهای



تابع پلکانی

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می شود. یک کیلووات ساعت در واقع مصرف یک وسیله هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت (kwh) برق مصرف کرده ایم.

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز ۲۴۶/۳۳ kwh بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می شود

پله های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰



۵۳۰۰۴	۴۶/۲۳	۱۱۲۵	مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰
		۲۰۲۵	مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰
		۲۳۲۵	مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰
		۲۹۲۶	مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰
		۳۲۲۶	مازاد بر ۶۰۰

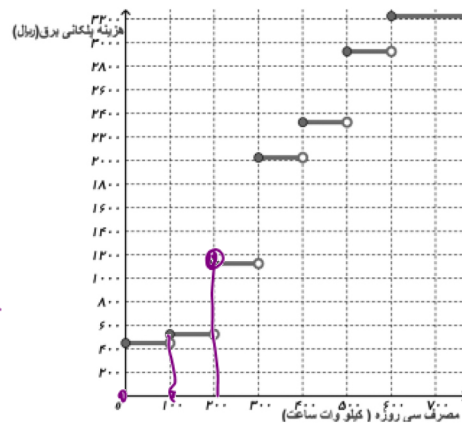
مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می کند. (البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و

عوارض برق و ... اضافه می شود و عموماً قبض های برق برای بیشتر از سی روز صادر می شوند).

تابع پله ای ← تابع چندضابطه ای

که هر ضابطه هالسی عدد ثابت اند

جدول بالا را با نمودار می توان مشخص کرد



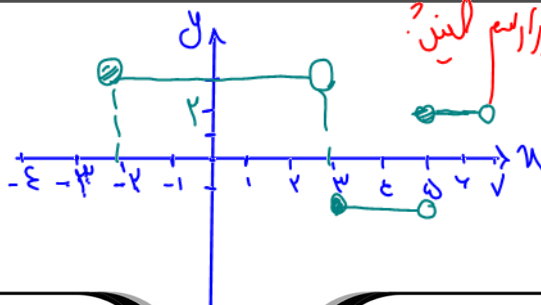
$$f(x) = \begin{cases} 500 & 0 \leq x < 100 \\ 700 & 100 \leq x < 200 \\ 1100 & 200 \leq x < 300 \\ 2000 & 300 \leq x < 400 \\ 2300 & 400 \leq x < 500 \\ 2900 & 500 \leq x < 600 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ 4 & 1 < x < 4 \\ 5 & x < -2 \end{cases}$$

هر تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع، عددی ثابت باشد را تابع پله ای می نامند.

تابع پله ای

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 5 < x < 7 \\ -1 & 3 < x < 5 \\ 3 & -2 < x < 3 \end{cases}$$

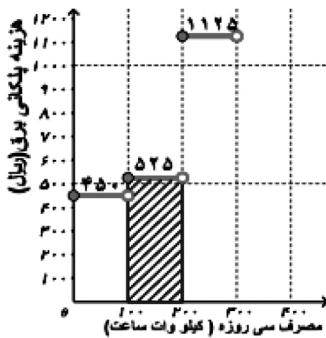


مثال: نمودار تابع پله ای زیر را رسم کنید؟



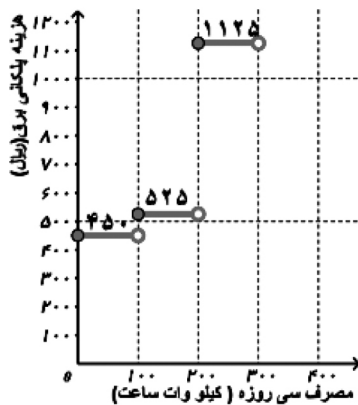
تمرین ۱۷: به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:

الف) هزینه ۱۰۰۰ kwh اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده‌شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟



ب) مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟

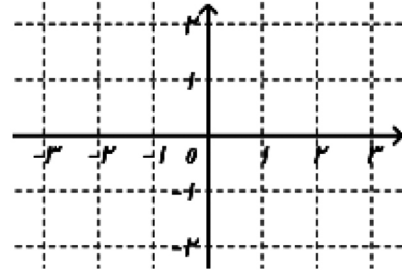
پ) هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید





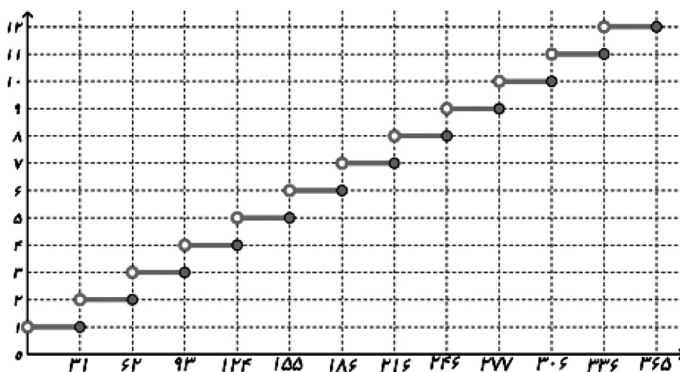
تمرین ۱۸: بر اساس ضابطه تابع پلکانی $y = f(x)$ نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



تمرین ۱۹: نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت هایی هستند؟ واحدهای

آن ها را مشخص کنید. ضابطه y تابع را بنویسید؟



(۳) تابع جریب معیوس
۳۱ تا ۶۲: ۱ واحد
۶۲ تا ۹۳: ۲ واحد
۹۳ تا ۱۲۴: ۳ واحد
۱۲۴ تا ۱۵۵: ۴ واحد
۱۵۵ تا ۱۸۶: ۵ واحد
۱۸۶ تا ۲۱۶: ۶ واحد
۲۱۶ تا ۲۴۶: ۷ واحد
۲۴۶ تا ۲۷۷: ۸ واحد
۲۷۷ تا ۳۰۶: ۹ واحد
۳۰۶ تا ۳۳۶: ۱۰ واحد
۳۳۶ تا ۳۶۵: ۱۱ واحد

(۲) تابع عدد مطلق
چهار تاییه ۱، ۲، ۳، ۴
۳۳

(۱) تابع علامت



ریاضی و آمار ۲

تمرین ۲۰: هرکدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمایی و رانندگی سه‌حالتی



تابع جزء صحیح

فرض کنید y تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح

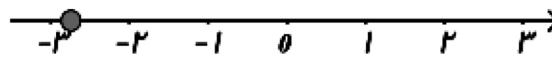
کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.



مثال: در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد. به بیانی دیگر:

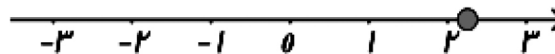


اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد نسبت می‌دهد.



$$\dots \leq x < \dots \Rightarrow g(x) = \dots$$

و اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲ و ۳ باشد، تابع g مقادیر x را به عدد نسبت می‌دهد.



$$\dots \leq x < \dots \Rightarrow g(x) = \dots$$

تمرین ۲۱: به کمک تابع g که در بالا تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

حدود x	جواب تابع g	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) =$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) =$	

کلاس حل است بیست و نه روز پیش شروع ۱۸ آذر ماه :

۱) تابع ثابت $f(x)$ اگر $(f(x))^2 + 5f(x) = 36$ و $f(4) = f(9)$ باشد $f(9)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ f(x) &= f \\ f(9) &= f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= k \\ 0 &= k^2 - 5k \\ k^2 - 5k &= 0 \end{aligned}$$

$$k(k-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=5 \end{cases} \Rightarrow k=5$$

$$(1) \text{ تابع ثابت } f(x) \text{ اگر } (f(x))^2 + 5f(x) = 36$$

$$k^2 + 5k = 36$$

$$k^2 + 5k - 36 = 0$$

$$(k+9)(k-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k+9=0 \Rightarrow k=-9 \\ k-4=0 \Rightarrow k=4 \end{cases}$$

- ۴
- ۸
- ۹
- $\sqrt{6}$

$$f(x) = x$$

۲) تابع $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + 2x + 2}$ همگنی باشد $a+b+c$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + 2x + 2} &\Rightarrow \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x^2 + 2x + 2} \\ x^3 + ax^2 + bx + c &= x^3 + 2x^2 + 2x \\ a &= 2 \\ b &= 2 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

- ۲
- ۴
- ۱

۳) اگر $\left\lfloor \frac{x+3}{x} \right\rfloor = 2$ باشد چند مقدار برای $[x]$ وجود دارد؟ $[]$ علامت جزء صحیح است.

اولین عدد صحیح کمتر از

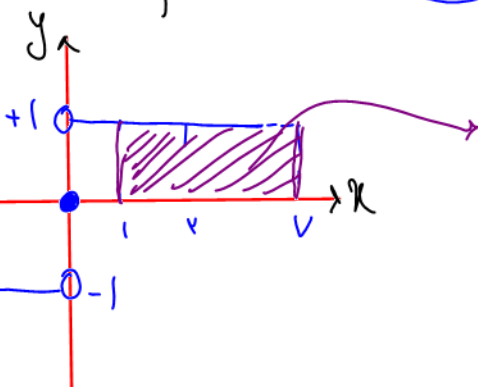
$$\begin{aligned} [2,3] &= 2 \\ [-2,3] &= -3 \\ [2] &= 2 \\ [-2] &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} < \frac{x}{x} < \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} < \frac{x}{x} < \frac{1}{2} \\ x^3 &\rightarrow 3 < x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &= \left\lfloor \frac{x}{x} \right\rfloor + \frac{3}{x} = 2 \Rightarrow \left\lfloor 1 + \frac{3}{x} \right\rfloor = 2 \\ 1 + \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor &= 2 \\ \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor &= 1 \end{aligned}$$

- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

۴) مساحت زیر منحنی تابع $y = \text{sign}(x)$ برای $x \in [1, 6]$ کدام است؟



$$\int_1^6 1 dx = 5$$

$$S_{\square} = \text{عرض} \times \text{طول} = 5 \times 1 = 5$$

- ۷
- ۶
- ۵
- ۳

اگر تابع f تابع ثابت باشد

$$f(x) = k$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -4 \end{array}$$

$$k^2 = 4 - k$$

$$k^2 - k - 4 = 0$$

$$(k - 3)(k + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k - 3 = 0 \rightarrow k = 3 \\ k + 1 = 0 \rightarrow k = -1 \end{cases}$$

اگر $f(x) = 2ax + b$ یک تابع باشد حاصل $a - b$ کدام است؟

موقعی اول (ها) را بیان کنید
اگر ما بخواهیم بدانیم باید از آنجا بزنیم

$$\begin{array}{l} 2ax + b \\ ax + b + 1 \\ -x + b + 2a \end{array}$$

$$2a + b = a + b + 1$$

$$7a + b = 9a + 3b + 1$$

$$0 = 9a + 3b - 7a - b + 1$$

$$2a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 2a + 2b = -1$$

$$2(3) + 2b = -1$$

$$6 + 2b = -1 \rightarrow 2b = -7 \rightarrow b = -3.5$$

$$a - b = 3 - (-3.5) = 6.5$$

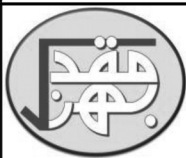
$$2a + b + 1 = -x + b + 2a$$

$$1 = b + 2a$$

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -4a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2a = -3 \\ a = 1.5 \end{array}$$

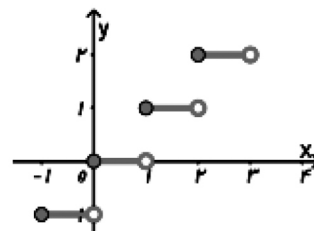
$$\begin{array}{c} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$



$0 \leq x < 1$	$g(x) =$	
$1 \leq x < 2$	$g(x) =$	
$2 \leq x < 3$	$g(x) =$	

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چند ضابطه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

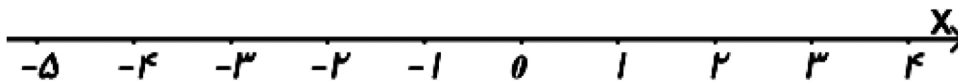


تابعی را که به هر عدد صحیح k فواید همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و عدد صحیح $k+1$ را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطه این تابع را با $g(x) = [x]$ معرفی می‌کنند.



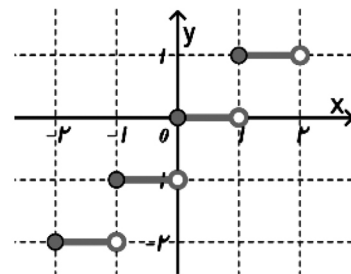
تمرین ۲۱: به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

$$\begin{aligned} [2] &= 2 & [2/7] &= 2 & [-2/7] &= -3 & [0/7] &= 0 & [-2/2] &= -3 \\ [-0/7] &= -1 & [-0/07] &= -1 & [-3/2] &= -4 & [-\pi] &= -4 & & \\ & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & -3.14 & & \end{aligned}$$



تمرین ۲۲: نمودار تابع $f(x) = [x]$ را در فاصله $-2 \leq x < 2$ رسم کنید.

x	$y = [x]$	نقطه ابتدایی	نقطه انتهایی
$1 \leq x < 2$	$y = 1$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$0 \leq x < 1$	$y = 0$	$(0, 0)$	$(1, 0)$
$-1 \leq x < 0$	$y = -1$	$(-1, -1)$	$(0, -1)$
$-2 \leq x < -1$	$y = -2$	$(-2, -2)$	$(-1, -2)$



تابع قدر مطلق

هرچند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند. بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند.

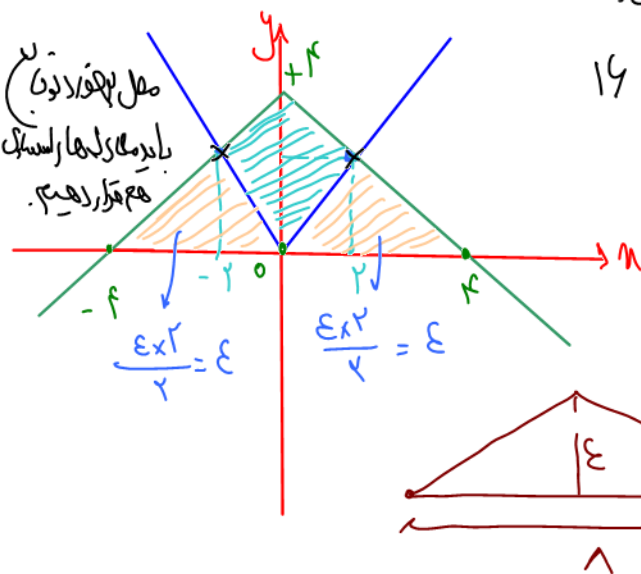
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ← یادداشت

① اثر $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x|$ حاصل $f(2\sqrt{2}-3)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}-3}{a}\right)^2 + \left|2\left(\frac{2\sqrt{2}-3}{b}\right)\right| = -\frac{1}{3}(1-12\sqrt{2}+9) + \left|\frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right| = -\frac{1}{3} + 4\sqrt{2}-3 - \frac{4\sqrt{2}-6}{3} = -\frac{1}{3} + 4\sqrt{2}-3 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 = -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{-1+9}{3} = \frac{8}{3}$$

$\sqrt{2} \approx 1.4$

② مساحت محدوده نمودار $y=|x|$ و $y=-|x|+4$ کدام است؟



$$|x| = -|x| + 4 \Rightarrow 2|x| = 4 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$S = 16 - (4+4) = 8$$

$$S = \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

③ مقدار $f(x) = \begin{cases} |2x^2-1| - \frac{1}{2} & x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} - 2 & x \geq 1 \end{cases}$ را در $f(0) + f(2)$ کدام است؟

$$|2x^2-1| - \frac{1}{2} = |2(0)^2-1| - \frac{1}{2} = |-1| - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|-1| - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4-1} - 2 = \sqrt{3} - 2 = 1.7 - 2 = -0.3$$

$$\frac{1}{2} + (-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

④ حاصل $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 2x^2+3x & x \leq 0 \end{cases}$ را در $f(3) + f(-1) + f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

$$f(3) = 3+1 = 4$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) = 2-3 = -1$$

$$f(\frac{3}{2}) = 1$$

$$4-1+1 = 4$$

۵- اگر $f(x) = (2a-1)x - a + 1$ تابع ثابت باشد $f(-1) + f(1)$ کدام است؟

$$f(x) = (2a-1)x - a + 1$$

$$2a - 1 + a = 0$$

$$3a - 1 = 0 \rightarrow 3a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = -a + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}$$

$$f(-1) + f(1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

۶- اگر رابطه $f = \{(3, a+2b), (5, 4), (7, 2), (3, 7), (5, a-b)\}$ تابع باشد $a^2 - b^2$ کدام است؟

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 2a - b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases}$$

$$5a = 15 \rightarrow a = 3$$

$$a + 2b = 4$$

$$3 + 2b = 4 \rightarrow 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$a^2 - b^2 = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$$

تقریب تابع تابع آن است که a ها مساوی نباشد. اما اگر a ها مساوی بود باید b ها نیز مساوی باشد.

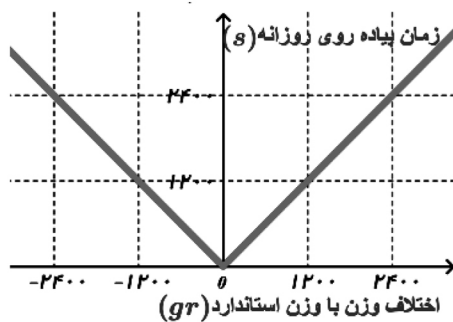
$$\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$$



هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک

گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده روی کند. بر این اساس فردی

با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه یعنی ۲۰ دقیقاً روزانه به صورت منظم پیاده روی کند و فردی با



۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه

این مفهوم را می توان به کمک نمودار زیر نشان داد

اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با

علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده روی

بر حسب ثانیه را نشان می دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200$$

$$f(-1200) = 1200$$

$$f(2400) = 2400$$

$$f(-2400) = 2400$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه ای می نویسیم:

این تابع را می توان چنین تغییر کرد که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می کند



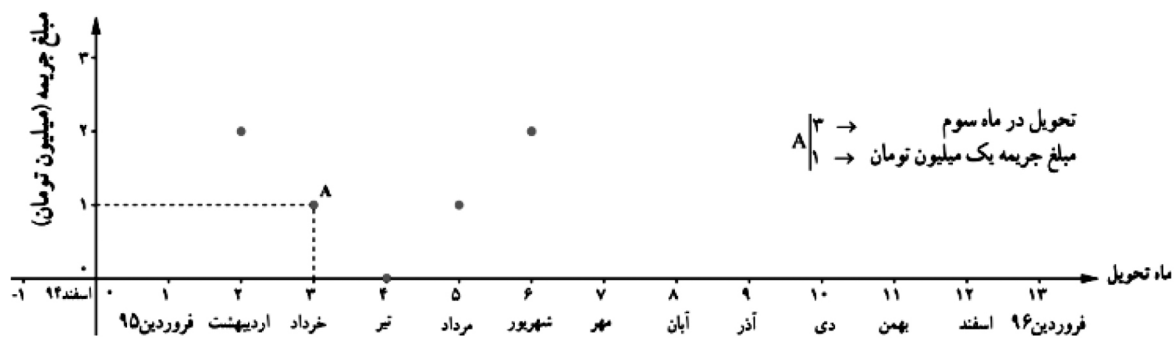
تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعریف:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

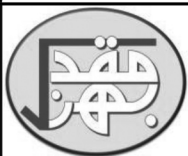
رنگه + سازه
+ حشر

تمرین ۲۳: بر اساس قرارداد میان پیمانکار پل رودخانه سیمینه رود و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف بازمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک میلیون جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد. الف) نمودار جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه های مختلف را کامل کنید. (زمان تحویل تیرماه ۱۳۹۵)

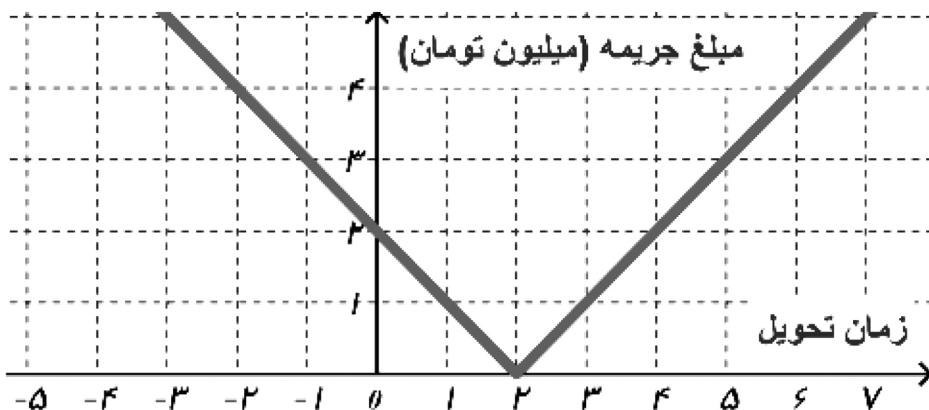


ب) آیا می توان این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلق بیان کنید؟

پ) اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه را در چه ماه یا ماه هایی انجام شده است؟ چرا؟



تمرین ۲۴: با توجه به نمودار



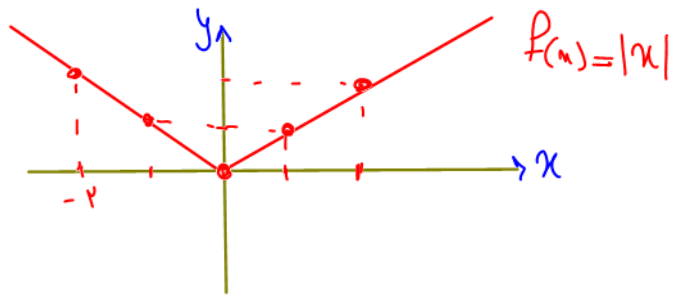
الف) شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب) به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

پ) به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

ت) شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

$$f(x) = |x| \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$



$$f(x) = -|x|$$

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & x > -3 \\ -x-3 & x < -3 \end{cases}$$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$$f(x) = |x-7| = \begin{cases} x-7 & x > 7 \\ -x+7 & x < 7 \end{cases}$$

$$f(x) = |2x-6| = \begin{cases} 2x-6 & x > 3 \\ -2x+6 & x < 3 \end{cases}$$

$2x-6=0 \Rightarrow x=3$

$$f(x) = |-3x+8| = \begin{cases} -3x+8 & x > \frac{8}{3} \\ 3x-8 & x < \frac{8}{3} \end{cases}$$

$-3x+8=0 \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$$f(x) = |-5x-10| = \begin{cases} -5x-10 & x > -2 \\ 5x+10 & x < -2 \end{cases}$$

$-5x-10=0 \Rightarrow x=-2$

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = -|x|$$

$$f(x) = |x+1|$$

$$f(x) = |x-1|$$

$$f(x) = -|x+3|$$

$$f(x) = |x+2|$$

$$f(x) = |x-1|$$

$$f(x) = -|x+3|$$

$$f(x) = -|x-2|$$

$$f(x) = |x| + 2$$

$$f(x) = |x|$$

① $f(x) = |x| + 2$

② $f(x) = |x| - 2$

③ $f(x) = -|x| - 1$

④ $f(x) = -|x| + 3$

$f(x) = |x| - 2$

$f(x) = |x - 2|$

$f(x) = -|x| - 2$

$f(x) = -|x + 2|$

$f(x) = |x - 1| + 2$

$f(x) = |x + 2| - 1$

$f(x) = -|x + 2| - 3$

$f(x) = -|x - 1| - 2$

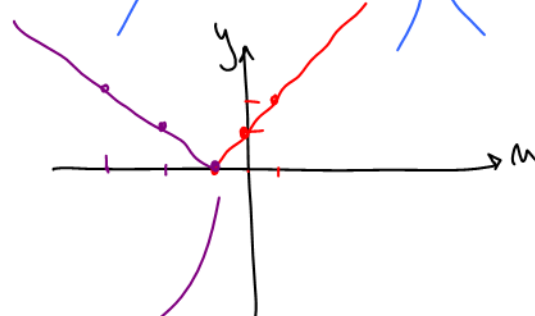
$f(x) = |x + 1|$

$f(x) = |x - 1|$

$f(x) = |x + 1| \Rightarrow \begin{cases} x + 1 & x > -1 \\ -x - 1 & x < -1 \end{cases}$

x	-1	0	1
y	0	1	2

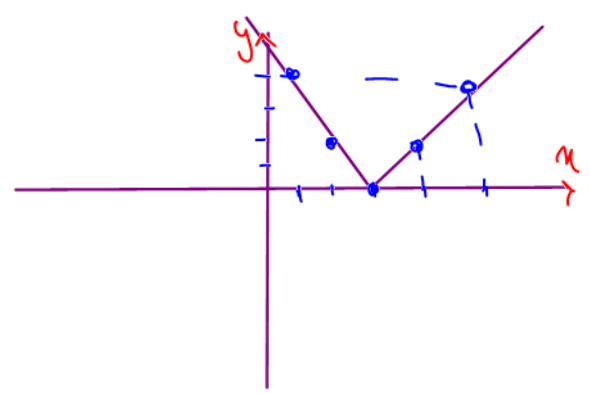
x	-3	-2	-1
y	2	1	0



$$f(x) = |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & x > 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

نکته: علامت

$x > 3$	$\begin{array}{c ccc} x & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 0 & 2 & 4 \end{array}$
$x < 3$	$\begin{array}{c ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 4 & 2 & 0 \end{array}$



علامت، Sign

نکته: علامت

$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$

کلاس روز سه شنبه ۲۷ آذر

تابع ثابت: $f(x) = k$

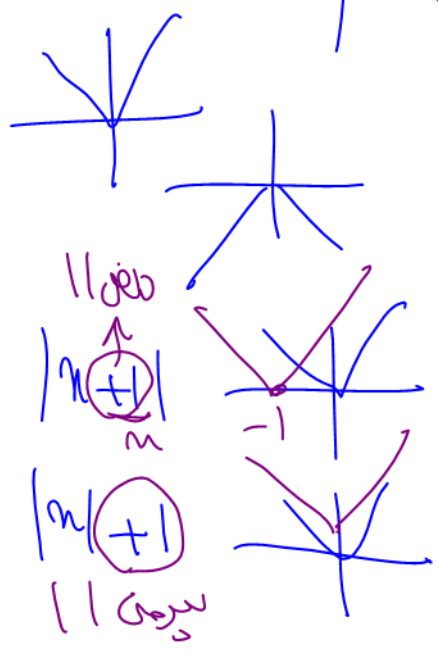
تابع خطی: $f(x) = x$

تابع درجه دوم: $f(x) = x^2$

تابع گویا: $f(x) = \frac{1}{x}$

تابع نمایی: $f(x) = e^x$

تابع لگاریتمی: $f(x) = \ln(x)$



حزب جمع []

$f(x) = \begin{cases} a & x > 0 \\ -a & x < 0 \end{cases}$

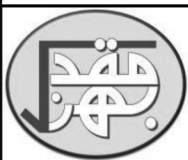
$f(x) = |a|$

$f(x) = |x|$

$f(x) = |x+1|$

$f(x) = |x-1|$

$$\frac{10, 25}{\leftarrow} \leftarrow \leftarrow$$



تمرین ۲۵: نمودار تابع $y = |2x - 6|$ را رسم کنید.

$$|\mu| = \begin{cases} \mu & \mu \geq 0 \\ -\mu & \mu < 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف قدر مطلق

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 \\ -2x + 6 & 2x - 6 < 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

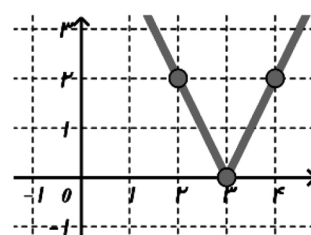
$$y = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -2x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

پس ضابطه تابع این گونه مشخص می شود:

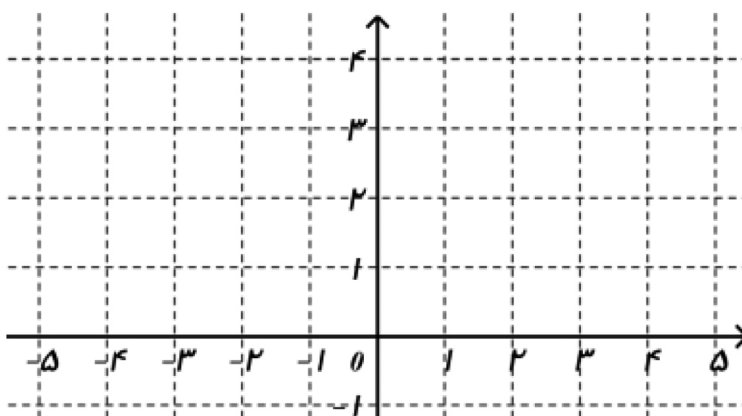
و نمودار تابع به صورت زیر رسم می شود:

x	۲	۳
y	۲	۰

x	۳	۴
y	۰	۲



تمرین ۲۶: الف) نمودار توابع $y = |x|$ و $y = |x - 4|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



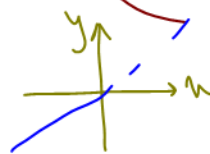
$$f(x) = |x| \quad \text{۳) قدر مطلق}$$

$$f(x) = -|x|$$

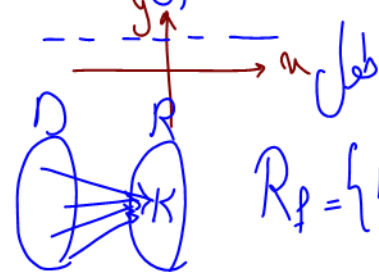


۱) تابع ثابت $\leftarrow$

$$f(x) = x \quad \text{۲) تابع همنوع}$$



$$f(x) = K \quad \text{عریف}$$



$$R_f = \{K\}$$

برزنده عضو

۱) تابع ثابت $\leftarrow$ اگر f تابع ثابت و g تابع همنوع باشد و f از رتبه $(1, 1)$ بتدریج حاصل

$$\frac{f(1) - g(1)}{f(1)} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

۲) تابع همنوع $\leftarrow$ اگر f تابع همنوع و g تابع ثابت باشد و f از رتبه $(1, 1)$ بتدریج حاصل

$$\frac{f(1) - g(1)}{f(1)} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$\frac{19 - 15}{1} = \frac{1}{1}$$

۳) قدر مطلق $\leftarrow$ اگر f تابع قدر مطلق و g تابع ثابت باشد و f از رتبه $(1, 1)$ بتدریج حاصل

$$\frac{f(1) - g(1)}{f(1)} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

۴) تابع همنوع $\leftarrow$ اگر f تابع همنوع و g تابع قدر مطلق باشد و f از رتبه $(1, 1)$ بتدریج حاصل

$$\frac{f(1) - g(1)}{f(1)} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

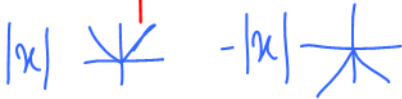
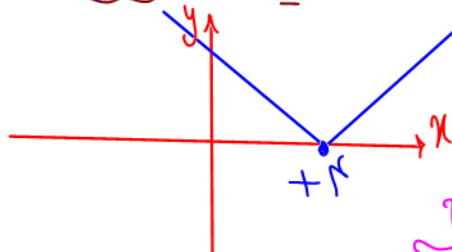
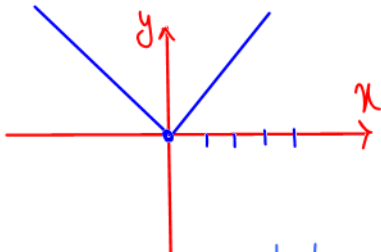
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$



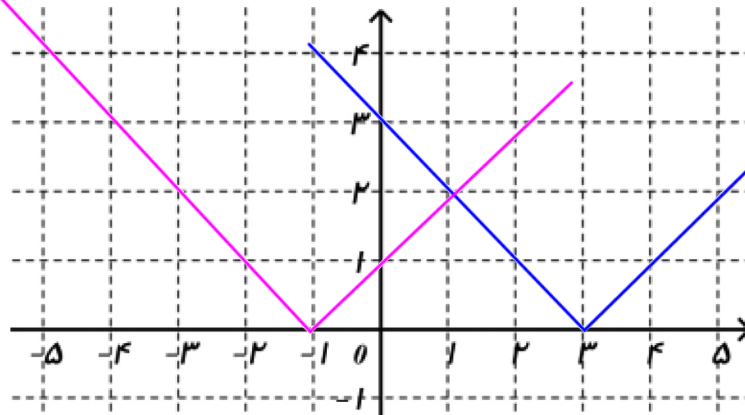
$y = |x|$ = ذرفجهه = راست

ب) آیا می توان بدون مراحل بالا، بر اساس نمودار $y = |x|$ ، نمودار $y = |x - 2|$ را رسم کرد؟ چگونه؟



پ) نمودار تابع $y = |x + 1|$ و $y = |x - 3|$ را با توجه به نتیجه قسمت «ب» رسم کنید

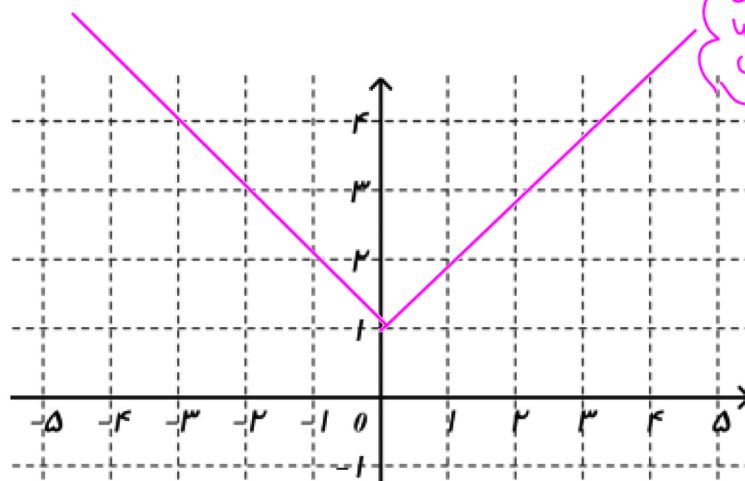
$|x + 1|$



$|x - 3|$

سیرون ← رها ← درجهه

ت) نمودار تابع $y = |x| + 1$ را چگونه می توان بر اساس نمودار $y = |x|$ رسم نمود؟



$y = |x| + 1$

$$y = |x-2|$$

$$y = |x+1|$$

$$y = -|x-2|$$

$$y = -|x+1|$$

$$y = -|x|-1$$

$$y = -|x+2|$$

$$y = -|x|+2$$

$$y = -|x|+1$$

$$y = |x-1|+2$$

$$y = -|x-3|+2$$

$$y = |x+2|$$

$$y = |x+3|-2$$

$$y = |x-1|$$

$$y = -|x+2|-3$$

$$y = -|x-2|-1$$



$\frac{2}{3}f$	$-2f$	$\frac{1}{3}f$	$f-2$	$\frac{f}{2}$
$\frac{1}{2}f-5$	$-1f+3$	$\frac{f}{2}-9$	$-2f-9$	
$-\frac{f}{2}+1$	$-3f-6$			

← جواب $f = \{(-1,0)(2,-1)(4,2)(-3,7)(\frac{4}{3},\frac{2}{3})\}$ اگر

$f = \{(4,5)(-3,2)(1,\frac{4}{5})\}$ اگر



درس ۳: اعمال روی توابع

تمرین ۲۷: علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و می‌خواهد پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) را به تماشای یک فیلم یا تئاتر جشنواره دهه فجر دعوت کند. او ابتدا به خانواده‌اش پرسش‌نامه‌ای می‌دهد تا فیلم یا تئاتر مورد علاقه‌شان را انتخاب کنند. زیرا او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده‌اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سینمایی آن‌ها و خودش را تأمین کند

با توجه به بودجه محدودی که او برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بدانند هزینه صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۱ هزینه بلیط با توجه به گروه‌های مختل

مکان نمایش / گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰
دانشجو	= ۲۰٪ تخفیف	= ۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	= ۵۰٪ تخفیف	= ۵۰٪ تخفیف

علیرضا نتایج پرسش‌نامه داده‌شده به اعضای خانواده را در جدول‌های زیر مشخص نمود:

جدول ۲ علاقه‌مندی به سینمای کودک و نوجوان



اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
مریم		✓		✓	✓
علیرضا			✓	✓	✓

جدول ۳- علاقه مندی به سینما

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه‌ای	علمی - تاریخی
مادر		✓			✓		✓
پدر			✓	✓	✓		
مریم							
علیرضا			✓		✓		✓

جدول ۴ علاقه مندی به تئاتر

اعضای خانواده	سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر		✓	✓	✓	
پدر			✓	✓	✓
مریم		✓		✓	
علیرضا			✓	✓	

لست ← از f تابعی ثابت و g تابعی همتا باشد و $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3}{5}$ حاصل $\frac{g(2)}{f(2)} - 3 \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{3}{5}$ و $\frac{g(1)}{f(1)} = \frac{10}{K}$

$\frac{g(1)}{f(1)} = \frac{10}{K} = \frac{10}{-15} = -\frac{2}{3}$

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5g(x) = 3f(x)$

$5g(2) = 3f(2) \Rightarrow 5g(2) = 3 \times 10 = 30 \Rightarrow g(2) = 6$

$5g(4) = 3f(4) \Rightarrow 5g(4) = 3 \times 10 = 30 \Rightarrow g(4) = 6$

$5g(1) = 3f(1) \Rightarrow 5g(1) = 3 \times 10 = 30 \Rightarrow g(1) = 6$

$5g(0) = 3f(0) \Rightarrow 5g(0) = 3 \times 10 = 30 \Rightarrow g(0) = 6$

$5g(2) = 3f(2) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(4) = 3f(4) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(1) = 3f(1) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(0) = 3f(0) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(2) = 3f(2) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(4) = 3f(4) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(1) = 3f(1) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

$5g(0) = 3f(0) \Rightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10 = 30$

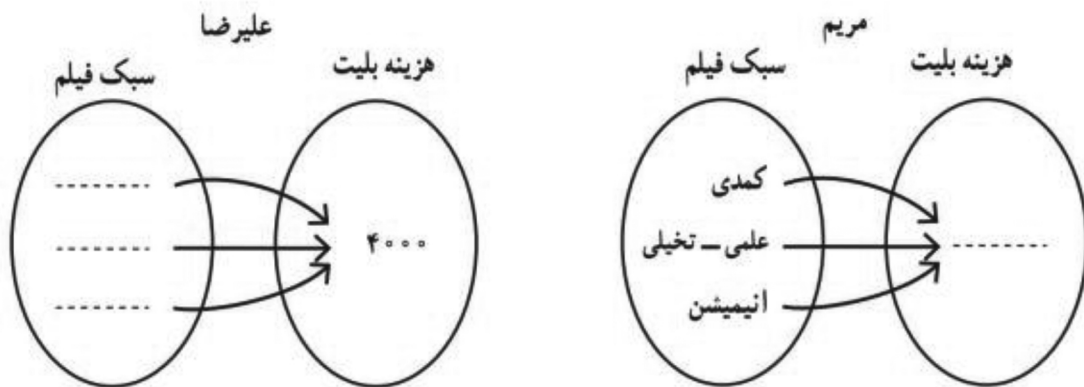


در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد. او باید دو نکته را مشخص کند:

- ۱- به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟
- ۲- هزینه بلیت آن‌ها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه‌مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقه، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که دامنه آن سبک فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و برد آن هزینه خرید بلیت، نمایش پیکانی این دو تابع به صورت زیر است:

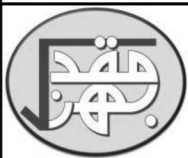
(ب) نمایش پیکانی این دو تابع را کامل کنید.



پس اشتراک فیلم مورد علاقه‌شان دو سبک فیلم و است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آن‌ها می‌توانند به سینما بروند.

$$\begin{aligned}
 (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\
 (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0
 \end{aligned}$$

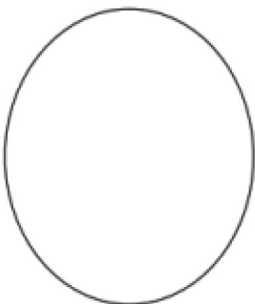
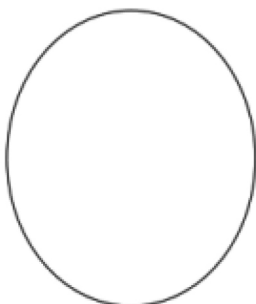
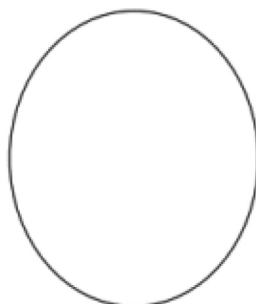
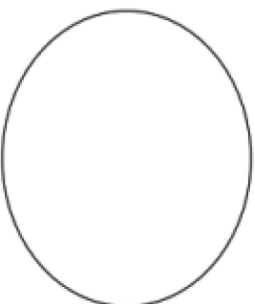
$$\begin{aligned}
 (f+g)(a) &= f(a) + g(a) \\
 (f-g)(a) &= f(a) - g(a) \\
 (f \times g)(a) &= f(a) \times g(a) \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{f(a)}{g(a)}
 \end{aligned}$$



تمرین ۲۸: اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواند مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و

۳:

الف) نمایش پیکانی مشابه تمرین صفحه قبل را برای هرکدام رسم کنید.

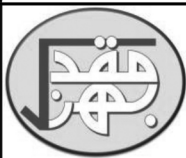
مادر		علیرضا	
سبک فیلم	هزینه بلیت	سبک فیلم	هزینه بلیت
			

ب) با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقه هرکدام، نمایش زوج مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج) هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می کند، چقدر است؟

تمرین ۲۹: پنجشنبه علیرضا می خواهد همه اعضای خانواده اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و ۴:

الف) نمایش زوج مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی شرایطی را که همه آنها به تماشای یک تئاتر می روند، مشخص کنید.



جمع - تفریق - ضرب - تقسیم

ریاضی و آمار ۲

$$f = \{(2, 5), (3, -1), (4, 9), (4, 0)\} \rightarrow f = \{(2, 5), (3, -1), (4, 18), (4, 0)\}$$

$$f+1 = \{(2, 6), (3, 0), (4, 10), (4, 1)\}$$

$$f_{\frac{1}{3}} = \{(2, \frac{5}{3}), (3, -\frac{1}{3}), (4, 3), (4, 0)\}$$

$$f-4 = \{(2, 1), (3, -5), (4, 5), (4, -4)\}$$

ب) علیرضا در این روز چه میزان هزینه می کند؟

تمرین ۳۰: با توجه به تمرین های قبل با چه شرایطی می توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

همان گونه که عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مورد دو عدد و دو پندجمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین عملی قابل انجام است.



اگر f و g تابع باشند. توابع و دو تابع حقیقی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \rightarrow D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \{x | g(x) \neq 0\}$$

تمرین ۳۱: اگر $f = \{(1, 2), (-3, 4), (3, 5), (7, -1)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, -1), (7, 2)\}$ ، ابتدا دامنه تابع را به دست آورید و سپس را به صورت مجموعه ای زوج های مرتب نشان دهید.

حل:

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\} \quad D_g = \{2, 3, 7\} \Rightarrow D_{f \cap g} = \{3, 7\}$$

$$f+g = \{(3, 5, -1), (7, -1+2)\} = \{(3, 4), (7, 1)\}$$

تمرین ۳۲: اگر $f = \{(-2, 5), (7, 9), (-6, -4), (3, 0)\}$ و $g = \{(-3, 8), (-2, 0), (3, 11), (7, 1)\}$ باشند. دامنه توابع زیر را به دست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه ای زوج های مرتب نشان دهید.



$$D_f =$$

$$D_g =$$

$$D_{f \cap g} =$$

$$(f + g)(\text{الف}) =$$



ب) $(f - g) =$

پ) $(f \times g) =$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right) =$

تمرین ۳۳: با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2 - 1$ و $f_2(x) = x + 1$:

الف) ضابطه توابع زیر را به دست آورید. ($\mathbb{R}$ دامنه مشترک هردو تابع است.)

$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x^2 - 1) + (x + 1) = x^2 + x$$

$$\Rightarrow f_3(x) = x^2 + x$$

$$f_4(x) = f_1(x) - f_2(x) = (x^2 - 1) - (x + 1) = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow f_4(x) = x^2 - x - 2$$

$$f_5(x) = f_2(x) - f_1(x) = (x + 1) - (x^2 - 1) = -x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow f_5(x) = -x^2 + x + 2$$

$$f_6(x) = f_1(x) \times f_2(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow f_6(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$f_7(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

$$\Rightarrow f_7(x) = x - 1$$

$$f_8(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow f_8(x) = \frac{1}{x - 1}$$

ب) مقادیر تابع‌های f_3 و f_8 به ازای $x = 2$ به دست آورید؟

$$f_3(x) = x^2 + x$$

$$\Rightarrow f_3(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$$

$$f_4(x) = f_4(x) = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow f_4(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$f_5(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow f_5(2) = -(2)^2 + (2) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$$

$$f_6(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow f_6(2) = (2)^3 + (2)^2 - (2) - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$$

$$f_7(x) = x - 1$$

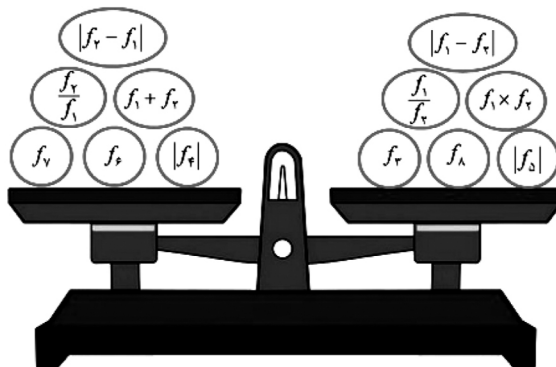
$$\Rightarrow f_7(2) = (2) - 1 = 1$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow f_8(2) = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$



پ) اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌ای کفه ترازو باشند، چرا دو کفه ترازو باهم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



تمرین ۳۴: با توجه به ضابطه‌های $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x - 1$:

الف) مقادیر تابع‌های زیر به ازای $x=2$ به دست آورید؟

$$f(2) = \Rightarrow g(2) =$$

$$h_1(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h_1(2) =$$

$$h_2(x) = f(x) - g(x) = \Rightarrow h_2(2) =$$

$$h_3(x) = g(x) - f(x) =$$

$$h_4(x) = f(x) \times g(x) =$$

$$h_5(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$h_6(x) = \frac{g(x)}{f(x)} =$$

$$h_7(x) = \frac{h_1(x)}{h_3(x)} =$$

$$h_8(x) = h_2(x) \times h_4(x)$$

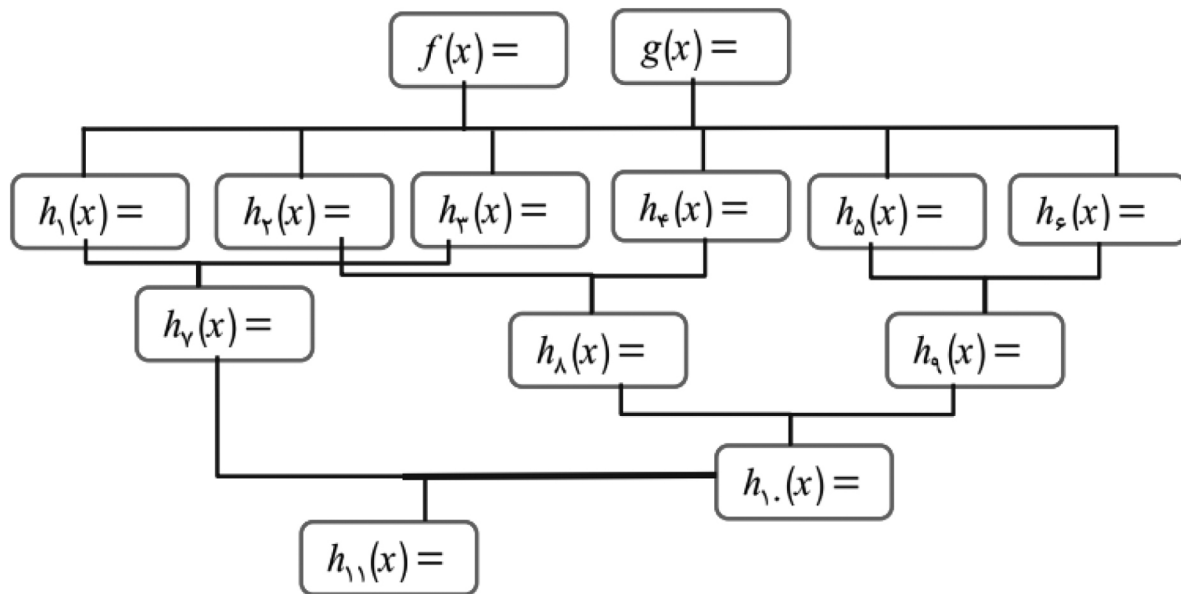
$$h_9(x) = h_5(x) + h_6(x)$$

$$h_{10}(x) = h_8(x) \times h_9(x)$$



$$h_{\gamma_1}(x) = h_{\gamma}(x) \times h_{\gamma_0}(x)$$

(ب) درخت زیر به ازای $x = 2$ کامل کنید.



تمرین ۳۵: اگر $f = \{(2, 0), (4, -1), (-1, -3)\}$ و $g = \{(2, 5), (3, -1), (-1, 2)\}$ باشند، دامنه توابع زیر را به دست آورید و سپس توابع خواسته شده را به صورت مجموعه‌ای زوج‌های مرتب نشان دهید.

$$D_f =$$

$$D_{gg} =$$

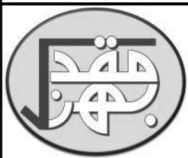
$$D_f \cap D_g =$$

الف) $f + g$

$$\text{ب) } (f - g) =$$

$$\mathfrak{p})(g-f)=$$

$$\text{ت) } (f \times g) =$$

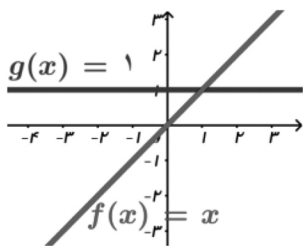


ث) $\left(\frac{f}{g}\right) =$

ج) $\left(\frac{g}{f}\right) =$

تمرین ۳۶: به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g نمودار تابع $f + g$ را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

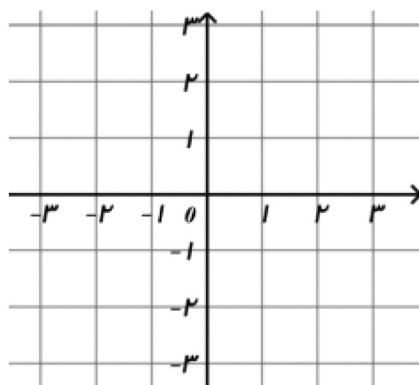
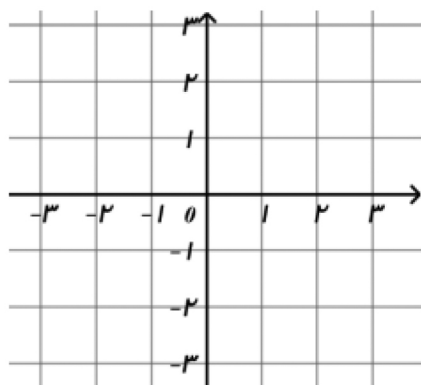
(الف)



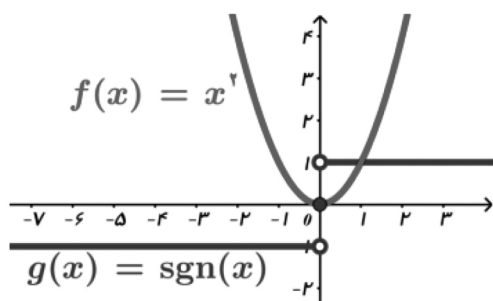
$x = -1$

$x = 0$

$x = 1$



(ب)

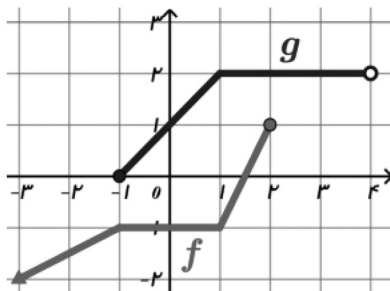
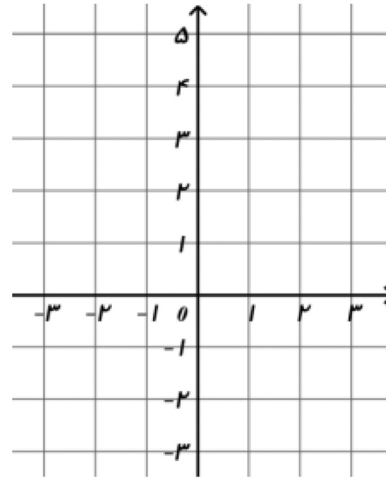
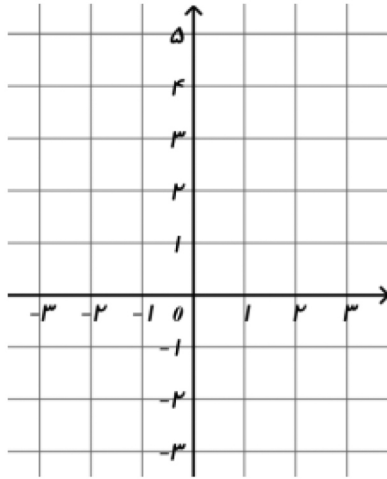


$x = -1$

$x = 0$

$x = 1$

$x = 2$



تمرین ۳۷: نمودار دو تابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر زیر را به دست آورید.

$$(f + g)(1)$$

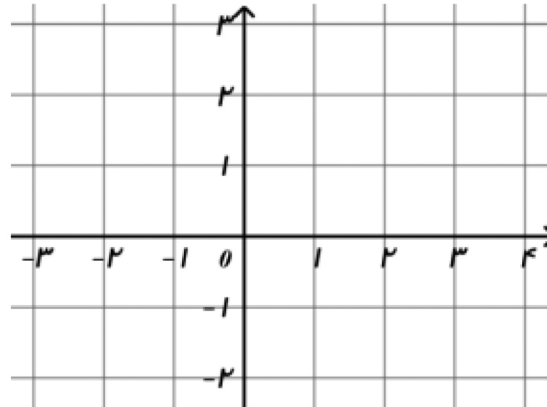
$$(f + g)(-1)$$

$$(f + g)(2)$$

$$(f + g)(0)$$



ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f + g$ را رسم کنید.



پ) ضابطه توابع f ، g و $f + g$ را به دست آورید.

تمرین ۳۸: به کمک نمودارهای رسم شده توابع f و g ، نمودار تابع $f + g$ را ابتدا در نقاط داده شده مشخص کنید، سپس

نمودار کلی تابع $f + g$ را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

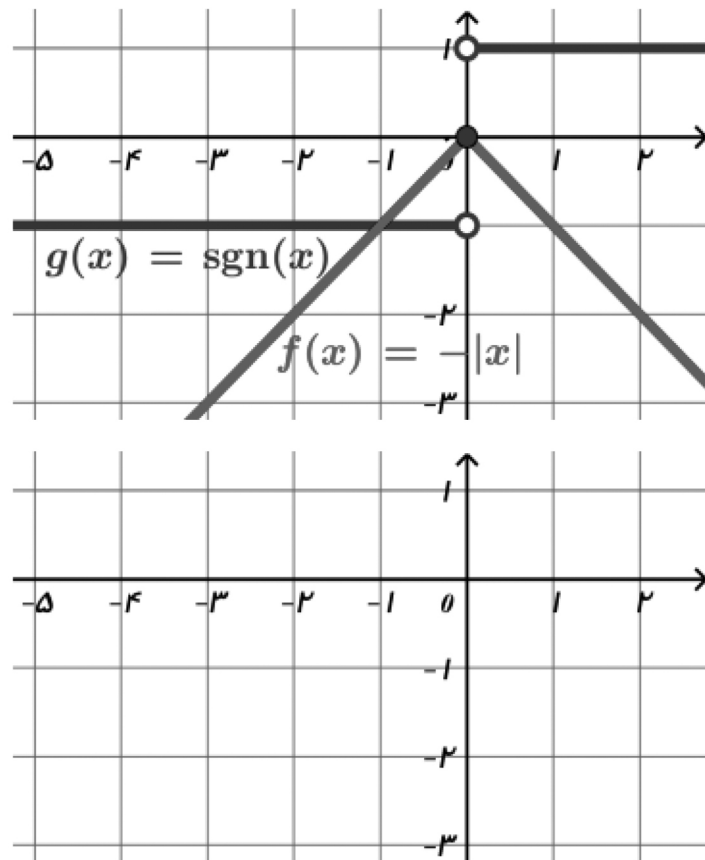
$$x = 2$$

$$x = 1$$

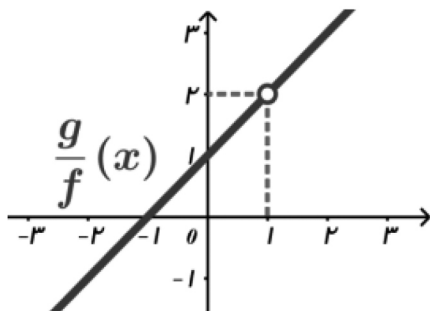
$$x = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$



تمرین ۳۹: اگر $g(x) = x^2 - 1$ و نمودار تابع $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ به صورت زیر باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست آورید.





تمرین ۴۰: اگر $g(x) = x + 3$ و $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 3$ تابع باشد، ضابطه تابع $f(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۴۱: اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $(f+g)(x) = 3x^2 - 5x + 7$ تابع باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.

$$x - 1 + 3 = +3$$

$$1 - x(2) = 1 - 2 = -1$$

تمرین ۴۲: اگر توابع $f(x) = 1 - 2x$ و $g(x) = x^2 - 4x + 7$ باشند، مقدار عبارت زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(x) - (f-g)(x) = (x^2 - 4x + 7) - (-x^2 + 2x - 6) = x^2 - 4x + 7 + x^2 - 2x + 6 = 2x^2 - 6x + 13$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (1 - 2x) + (x^2 - 4x + 7) = 1 - 2x + x^2 - 4x + 7 = x^2 - 6x + 8$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (1 - 2x) - (x^2 - 4x + 7) = 1 - 2x - x^2 + 4x - 7 = -x^2 + 2x - 6$$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3) - (f \times g)(2) = \frac{-5}{9} - (-9) = \frac{-5}{9} + 9 = \frac{-5 + 81}{9} = \frac{76}{9}$ $(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = -3 \times 3 = -9$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{1 - 2(3)}{(3)^2 - 4(3) + 7} = \frac{1 - 6}{9 - 12 + 7} = \frac{-5}{4}$$

تمرین ۴۳: اگر توابع $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \begin{cases} -2 & x \geq 2 \\ x & 0 \leq x < 2 \\ -5 & x < 0 \end{cases}$ باشند، مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(3) + (f-g)(-2) - \left(\frac{f}{g}\right)(1) =$

ب) $(f \times g)(-4) + (f+g)(7)$



تمرین ۴۴: اگر توابع $fx = \begin{cases} -2 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ و $gx = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ باشند. مقدار عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(-2) \times (g)(0) =$

$$\underbrace{(-2+1)}_{-2+1} \times (-1) = (-1) \times (-1) = +1$$

ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$

تمرین ۴۵: یک مجتمع صنعتی دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانه

A به ترتیب $R_1(x) = 10x$ و $C_1(x) = x^2 + 2x - 30$ باشند و در کارخانه B به ترتیب $R_2(x) = 15x - x^2$

و $C_2(x) = 3x + 16$ واحد باشد.

الف) تابع سود مجتمع صنعتی را به دست آورید.

ب) این مجتمع صنعتی با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟



$f \rightarrow$

x	1	2	3	4
y	5	9	14	19

 $f(x) = 5x - 1$

$g \rightarrow$

x	1	2	3	4
y	1	8	27	64

 $g(x) = x^3$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ اگر توان f و g نسبت به یکدیگر باشد حاصل $\left(\frac{f}{g}\right)(\omega)$ کدام است؟

$\frac{f(\omega)}{g(\omega)} = \frac{5\omega - 1}{\omega^3} = \frac{5(\omega) - 1}{(\omega)^3} = \frac{24}{125}$

$\frac{11}{25}$ $\frac{24}{125}$ $\frac{10}{7}$

$f(x) = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$
 $g(x) = \{(1, 7), (2, 4), (3, 10)\}$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ اگر $f(x) = |x - 1|$ و $g(x) = \{(1, 7), (2, 4), (3, 10)\}$ کدام است؟

$f \cdot g = \{(1, -7), (2, -3), (3, -1)\}$ $f + g = \{(1, 7), (2, 5), (3, 12)\}$
 $\frac{f}{g} = \{(1, 0), (2, \frac{1}{4}), (3, \frac{1}{10})\}$ $f \cdot g = \{(1, 0), (2, 4), (3, 20)\}$

$4, 8, 12$
 $3, 6, 9, 12$
 $2, 4, 6, 8$
 $6, 8, 12, 14$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ اگر $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ و $g(x) = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$ کدام است؟

$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{3}), (2, \frac{4}{6}), (3, \frac{6}{9})\}$

$(3, 6), (2, 4), (1, 2)$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ اگر $f(x) = x + 7$ و $g(x) = x + 4$ کدام است؟

$(x+4)^2 - (x+7)(x+4)$
 $(x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 11x + 28) = x^2 + 8x + 16 - x^2 - 11x - 28 = -3x - 12$

$-3x - 9$
 $-3x - 12$
 $3x + 12$
 $3x + 9$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ اگر $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ و $\frac{f}{g}(x)$ برابر $\frac{2x - 4}{x^2 + ax + b}$ باشد $a - 2b$ کدام است؟

$\frac{f}{g}(x) = \frac{2x - 4}{x^2 + ax + b}$

$a - 2b = (-1) - 2(-2) = -1 + 4 = 3$

نسبت $\frac{f}{g}$ $\rightarrow$ مقدار عبارت $\left[\frac{-2}{\sqrt{x} + 1}\right]$ برای $x = \sqrt{5}$ کدام است؟

$\sqrt{5} = 2, 2$

$\rightarrow \left[\frac{-2}{\sqrt{5} + 1}\right] = \left[\frac{-2}{2 + 1}\right] = -1$

$$(x)^r - (r)(x) = 1 \omega$$

$$(x-a)(x+b) =$$

$$\begin{cases} \chi - \omega = 0 \rightarrow \chi = \omega \\ \chi + \psi = 0 \rightarrow \chi = -\psi \end{cases}$$

$$g(x) = K \quad f(x) = x$$

$$g(x) = \gamma$$

$$\begin{aligned} & \Delta, -\mu \\ & -\Delta, \mu \\ & 1, -\omega \\ & -1, \omega \end{aligned}$$

لستید ← اثر $f = \{(3, 5), (-1, 3), (2, -3)\}$ و $g = \{(-1, 2), (3, 0), (2, 4)\}$ حاصل $\frac{f+g}{g}$ کدام است؟

$$\frac{f}{g} + \frac{g}{g} = \frac{f}{g} + 1$$

$$f+g = \frac{\{(-1, 2)(\cancel{1}, \cancel{2})(1, 1)\}}{\{(-1, 1)(\cancel{1}, \cancel{1})(1, 1)\}} = (-1, \frac{2}{1})(1, \frac{1}{1})$$

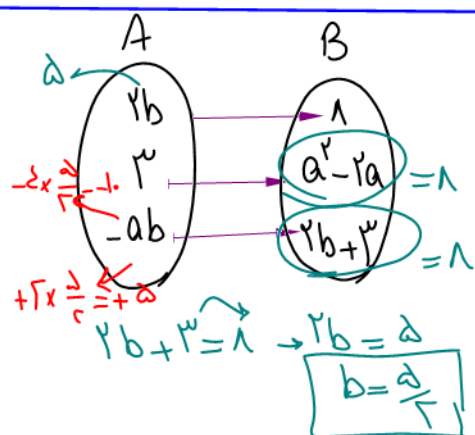
۱۱۰۰ (در علم ادبی تابع سلسله کردن می باشد)

$$\left\{ \left(-1, \frac{\omega}{r}\right), \left(2, \frac{1}{e}\right) \right\}$$

$$\left\{ \left(-1, \frac{\omega}{4} \right), \left(2, \frac{1}{\varepsilon} \right), \left(3, \omega \right) \right\}$$

$$\left\{ \left(-1, \frac{2}{y}\right), (1, 2) \right\}$$

$$\left\{ \left(-1, \frac{r}{r} \right) (r, \omega) \left(r, -\frac{r}{r} \right) \right\}$$



لست ٤ ← اگر دامنه تابع ثابت (مردم) باشد Q-b کدام است.

$$Q^T Q = I \rightarrow Q^T Q - I = 0$$

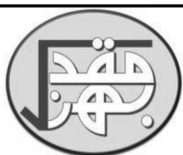
$$(a+x)(a-x) = \begin{cases} a+x = \boxed{a=-2} \\ a-x = \boxed{a=x} \end{cases}$$

$$\theta = \varepsilon \rightarrow D_f = \{ \Delta, \omega, -1. \}$$

$$a = -2 \rightarrow D_f = \{0, 3\}$$

$$a - b = (-1) - \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{-5-2}{5} = \frac{-7}{5}$$

$$\frac{\mu}{\gamma} \quad \frac{1}{\gamma}$$



درس ۱

شاخص های آماری

بسیاری از مواقع کمیتابی وجود دارند که می توانند معرف پارامتر جامعه باشند. کمیتابی مانند میانگین ، ، مد ، میانه ، انحراف معیار ، واریانس ، چارک ها و ... را که در سال قبل با آن آشنا شدید اگر در یک جامعه بررسی کنیم به آنها پارامتر جامعه می گوئیم و اگر در نمونه ای از جامعه بررسی کنیم به آنها آماره نمونه می گوئیم.

مانند : میانگین قد تمام دانش آموزان دبیرستان آیین روشن یک پارامتر جامعه است و میانگین قد ۵۰ نفر از دانش آموزان دبیرستان آیین روشن یک پارامتر نمونه است.

شافص یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعه آماری را نشان می دهد.



شاخص ها نه تنها مانند جداول فراوانی و نمودارها متغیرهای داده را خلاصه میکنند؛ بلکه واقعیتهای مفیدی را از جامعه به سادگی به ما نشان می دهند و امکان مقایسه را فراهم میکنند. مثلاً خط فقر شاخصی است که در آمد افرادی را که حداقل در آمد زندگی را ندارند، مشخص می کند. این شاخص به ما کمک میکند در طی زمان امکان بررسی تأثیر سیاست های دولت برای فقر زدایی را رصد کنیم.

خط فقر

تمرین ۱: درآمد ده نفر از کارکنان یک مؤسسه تجاری را که به شکل تصادفی انتخاب کرده ایم در جدول زیر آورده ایم:

ردیف	درآمد ماهیانه (تومان)	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد ماهیانه هر عضو	متوسط درآمد روزانه هر عضو
۱	۱۲۰۰۰۰۰	۳		
۲	۳۰۰۰۰۰۰	۴		
۳	۱۰۰۰۰۰۰۰	۱		
۴	۴۰۰۰۰۰۰	۵		
۵	۳۰۰۰۰۰۰	۱		
۶	۳۵۰۰۰۰۰	۷		
۷	۲۱۰۰۰۰۰۰	۳		
۸	۱۰۰۰۰۰۰۰	۴		
۹	۲۰۰۰۰۰۰۰	۲		
۱۰	۱۰۰۰۰۰۰۰	۱		



الف) جدول بالا را کامل کنید.

ب) میانگین و میانه درآمد ماهیانه خانواده چقدر است؟

۴۰۰۰۰۰ ۳۵۰۰۰۰ ۳۰۰۰۰۰ ۳۰۰۰۰۰ ۲۱۰۰۰۰ ۱۲۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰ ۱۰۰۰۰۰

$$m = \frac{2000000 + 2100000}{2} = 2050000$$

$$\bar{x} = \frac{3 \times 1000000 + 1200000 + 2000000 + 2100000 + 2 \times 3000000 + 3500000 + 4000000}{10}$$

$$= \frac{21800000}{10} = 2180000$$

ب) میانگین و میانه درآمد هر یک از افراد چقدر است؟

فقط فقر مراخل در آمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه مورد نیاز است.

نمونه مناسبه فقط فقر فقر برابر است با نصف میانگین یا نصف میانه درآمد ماهیانه افراد جامعه.

$$\text{میانگین درآمد} = \frac{\text{خط فقر از طریق میانگین}}{2}$$

$$\text{میانگین درآمد} = \frac{\text{خط فقر از طریق میانه}}{2}$$



ریاض و آمار ۲

تمرین ۲: در تمرین یک خط فقر را به دو روش ذکر شده محاسبه کنید هیئت مدیره مؤسسه تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را بر اساس نصف میانه محاسبه کند به کدام یک از کارکنان چه میزان یارانه بدهند که خانواده او حداقل در آمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

خط فقر بین المللی توسط بانک جهانی ۲۵/۱ دلار آمریکا برای هر نفر در روز تعیین شده است.

که با نرخ دلار سال چاپ کتاب این خط فقط حدود ۳۰۰۰ تومان می شود.

تمرین ۳: در تمرین یک چند خانوار در آمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.

تمرین ۴: اگر در آمد یک خانواده ۳ نفری در یک ماه ۲ میلیون تومان باشد، طبق این تعریف این خانواده چه وضعیتی دارد؟

$$\text{بهر نفر } 227 \text{ تومن می رسد} \quad 2000000 : 3 = 666,666$$

تمرین ۵: متوسط درآمد ماهیانه یک خانواده سه نفره در ماه حداقل چقدر باشد تا طبق خط فقر بین المللی (شخص فقیر نباشد؟)

در آمار مایلانیک شرکت تجاری بر اساس میلین به صورت زیر است.

مثال ۲ ← ششگانه

۱۱ ۱۰ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱
۵, ۴, ۴, ۳, ۲, ۱, ۶, ۸, ۸, ۱۰, ۲

۱۵, ۶, ۸, ۸, ۱۰, ۴, ۳, ۲, ۱, ۲, ۱ → براساس میان

$$\frac{۴}{۲} = ۲ \rightarrow \text{خفا فقر براساس میان} \rightarrow \text{میان} = ۴$$

$$\bar{x} = \frac{۵+۴+۴+۳+۲+۱+۶+۸+۸+۱۰+۲}{۱۱} = \frac{۵۳}{۱۱} = ۴,۸ \rightarrow \text{خفا فقر براساس میانگین} \rightarrow \frac{۴,۸}{۲} = ۲,۴$$

مثال: در آمار افزایش روتای لو فیک بر حسب میلین تومان اعداد زیر است. خفا فقر را بر هر دو روش میاب کنید. کدام بهتر است چرا؟

~~۵~~, ~~۲~~, ~~۱~~, ~~۷~~, ~~۶~~, ~~۵~~, ~~۱~~, ~~۲~~, ~~۱~~, ~~۲~~, ~~۱~~, ~~۵~~

$$\frac{۳۵}{۱۲} = ۲,۹ \approx ۳ \rightarrow \text{خفا فقر براساس میانگین} = \frac{۳}{۲} = ۱,۵$$

میان $\Rightarrow ۲$

$$\frac{۲}{۲} = ۱ \rightarrow \text{خفا فقر براساس میان}$$

۷, ۵, ۵, ۲, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱
 $\frac{۲+۲}{۲} = ۲$



مثال معکم: اگر خفا فقر در یک اداره بر روش نصف میانگین ۲ میلین تومان باشد و در آمار اعداد زیر باشد عدد را پیدا کنید.

۲, ۹, ۶, ۵, ۱, ۴, ۵, ۲, ۳, ۵

$$\frac{\text{میانگین}}{۲} = ۲ \rightarrow \text{میانگین} = ۴$$

$$\frac{۵+۳+۲+۵+۴+۱+۵+۲+۹+۲+۱}{۱۱} = \frac{۴۰}{۱۱}$$

$$\frac{۲۴+a}{۱} = \frac{۴۰}{۱} \rightarrow ۲۴+a = ۴۰ \rightarrow a = ۴۰-۲۴ = ۱۶$$

$$a = ۱$$



تمرین ۶: چه موقع دو روش محاسبه خط فقر تفاوت زیادی با هم دارند؟ چرا؟

شاخص بهای کالاها و خدمات

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف کنندگان برای مجموعه ای از تعداد

زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است.

این شاخص تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می دهد.

هزینه یک کالا = میزان مصرف کالا × قیمت کالا

نحوه محاسبه شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی

گام اول: انتخاب سال پایه

$$\text{شاخص بهای کالا و خدمات} = \frac{\text{کل هزینه جدید}}{\text{کل هزینه قدیم}} \times 100$$

$$\begin{aligned} \text{سال قدیم} &= \text{سال پایه} = \text{سال ۱۳۹۰} \\ \text{سال جدید} &= \text{سال مورد نظر} = \text{سال ۱۳۹۱} \end{aligned}$$



سال پایه هر چند سال یکبار توسط بانک مرکزی با توجه به ساختار جامعه تعیین میگردد زیرا با گذر زمان و پیشرفت تکنولوژی و ظهور کالاهای جدید سید مصرفی خانوار تغییر می یابد. به فرض مثال چند سال پیش از نوار کاست استفاده می شد اما اکنون CD ها و DVD و ... جانشین آن شده اند.

گام دوم: انتخاب سبد مصرفی خانوارها در سال پایه

سبد مصرفی خانوارها مجموعه ای از کالاهای و خدمات مصرفی مانند خوراکیها آشامیدنی، ها، حمل و نقل، اینترنت و ... است. او خدمات در سید مصرفی خانوار و زندهای متفاوت دارند انتخاب سید مصرفی و اندازه گیری وزن کالاهای و خدمات توسط بانک مرکزی در سال پایه صورت می گیرد.

گام سوم: محاسبه هزینه خانوار در سال پایه و سال مورد نظر بر اساس سید مصرفی انتخابی در سال پایه

در یک جامعه فرضی سبد مصرفی شامل دو کالای A و B باشد هزینه خانوار در سال پایه و مورد نظر به صورت زیر محاسبه می گردد:

مقدار مصرف این دو کالا در سال پایه : p'_A, p'_B

قیمت دو کالا در سال پایه : p_A, p_B

قیمت دو کالا در سال مورد نظر : p_A, p_B

$p_A \times q_A + p_B \times q_B$ = هزینه خانوار در سال پایه

$p'_A \times q_A + p'_B \times q_B$ = هزینه خانوار در سال مورد نظر



گام چهارم: محاسبه شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی

شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی از تقسیم هزینه خانوار در سال مورد نظر بر هزینه خانوار در سال پایه ضرب در ۱۰۰ بدست می آید

$$\text{شاخص بهای دو کالا} = \frac{p'_A \times q_A + p'_B \times q_B}{p_A \times q_A + p_B \times q_B} \times 100$$

$$\text{شاخص بهای یک کالا} = \frac{\text{مقدار کالا در سال پایه} \times \text{قیمت کالا در سال مورد نظر}}{\text{پایه سال در کالا مقدار} \times \text{قیمت کالا در سال پایه}}$$

تمرین ۷: اگر سید هزینه خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال و در سال مورد نظر ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد شاخص بهای نان و گوشت را محاسبه کنید.

$$\text{هزینه خانوار در سال مورد نظر} = 1500 \times 200 + 70000 \times 80 = 300000 + 5600000 = 5900000$$

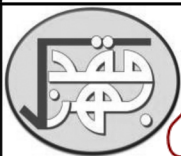
$$\text{هزینه خانوار در سال پایه} = 1000 \times 200 + 50000 \times 80 = 200000 + 4000000 = 4200000$$

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{5900000}{4200000} \times 100 \approx 140/5$$

تمرین ۸: قیمت و مقدار برخی کالاهای تولید و مصرف شده یک پروژه ساختمان سازی برای دو سال به صورت مقابل است،

شاخص بهای این کالاها را محاسبه کنید.

ردیف	نوع کالا	سال ۱۳۹۵ مقدار مصرف (تن)	سال ۱۳۹۵ قیمت (تومان)	سال ۱۳۹۷ قیمت (تومان)
۱	سیمان			
۲	گچ			
۳	آجر			



مثال: قیمت کوسه در سال ۹۲ برابر ۱۴۰۰ تومان و در سال ۱۴۰۰ برابر ۱۸۰۰۰ تومان بود.
 بودا است. اگر میزان مصرف خانوار در سال ۹۲ برابر ۲ کیلوگرم و در سال ۱۴۰۰ برابر ۱۸ کیلوگرم باشد.
 (نسبت بهای کوسه) و در صورت فرض بهای کوسه را مصرف کنند!

$$\frac{18000}{92} = \frac{18 \times 1000}{2 \times 46} = \frac{9 \times 1000}{1 \times 23} = \frac{39}{23} = 1.69 \times 100 = 169\%$$

تمرین ۹: قیمت و مقدار برخی کالاهای تولید و مصرف شده کشاورزی برای دو سال به صورت مقابل است، شاخص بهای این کالاها را محاسبه کنید.

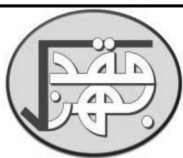
ردیف	نوع کالا	سال پایه ۱۳۸۰		سال ۱۳۸۸	
		قیمت (تومان)	مقدار مصرف قیمت (میلیون تن)	قیمت (تومان)	مقدار مصرف (میلیون تن)
۱	گندم	۱۰۰۰	۱۰	۱۲۰۰	۲۰
۲	برنج	۲۰۰۰	۵	۲۵۰۰	۱۰
۳	لوبیا	۳۰۰۰	۳	۴۰۰۰	۵
۴	عدس	۲۵۰۰	۲	۳۵۰۰	۵

مثال: در جدول خانوارهای دو کالای برنج و مرغ استفاده می‌کنیم. قیمت این دو کالا در سال ۹۵ به ترتیب ۸۰۰۰ و ۱۴۰۰۰ تومان و در سال ۹۹ به ترتیب ۸۰۰۰ و ۹۰۰۰ تومان بوده است. با فرض اینکه مصرف برنج و مرغ به ترتیب ۱۰ و ۵ کیلوگرم باشد، شاخص بهای برنج و مرغ را محاسبه کنید.

مقدار مصرف کالای ۱! مقدار مصرف کالای ۲!
 قیمت مصرف کالای ۱! قیمت مصرف کالای ۲!
 مقدار مصرف کالای ۱! مقدار مصرف کالای ۲!

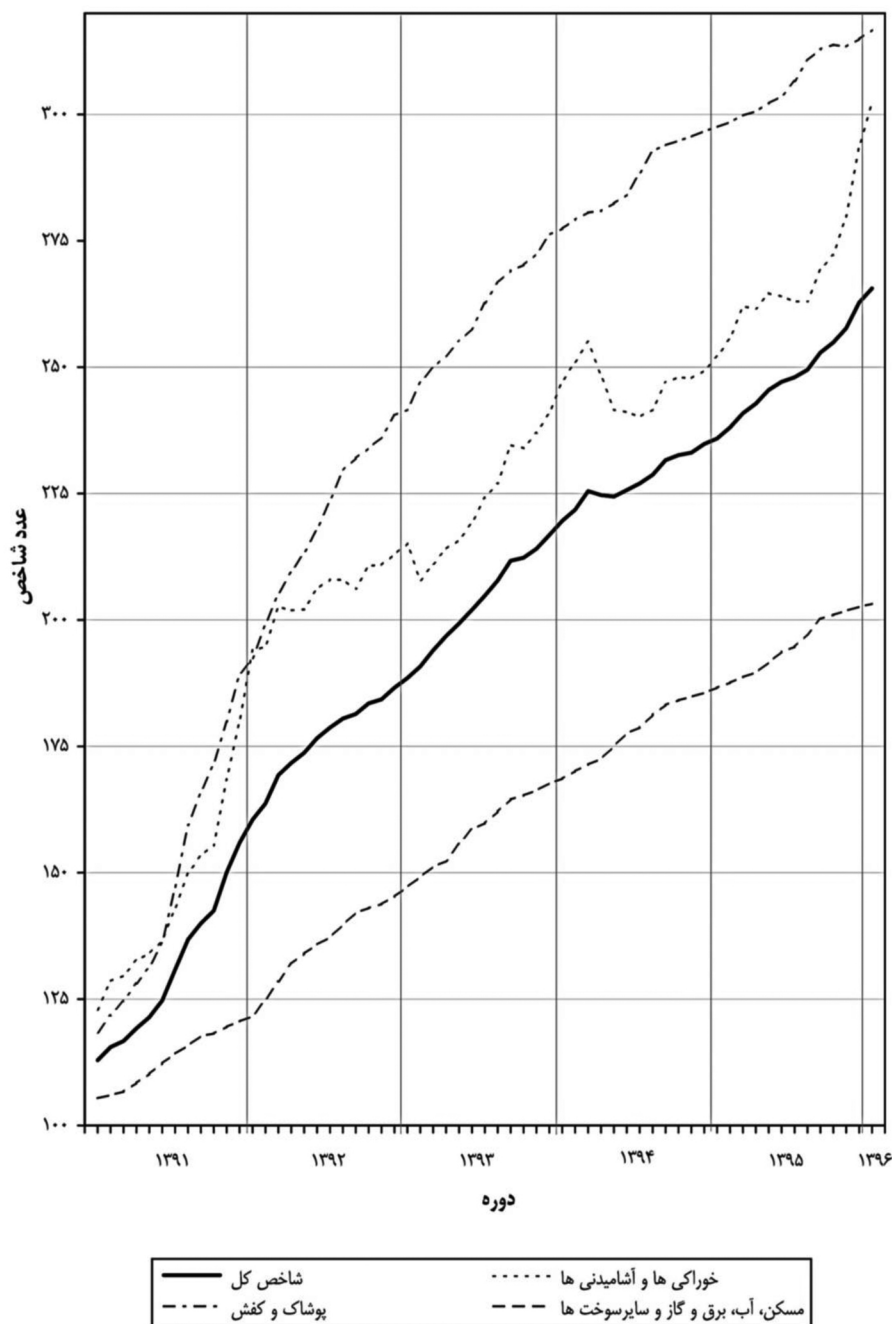
$$\frac{10 \times 8000 + 5 \times 14000}{10 \times 9000 + 5 \times 9000} = \frac{100000 + 70000}{90000 + 45000} = \frac{170000}{135000} = 1.26$$

هت کوسه - نخود - برنج در سال پایه به ترتیب ۵۰۰، ۸۰۰، ۹۰۰۰۰ تومان بوده است.
 در سال ۹۳ به ترتیب ۷۰۰، ۹۰۰، ۱۲۰۰۰ تومان بوده است.
 مقدار مصرف کوسه - نخود - برنج به ترتیب ۵ و ۸ و ۱۵ کیلوگرم بوده است.



شاخص کل بهای کالاها و خدمات مصرفی و برخی گروههای اصلی در مناطق شهری ایران

($1390=100$)



تمرین ۱۰: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.



الف) در نمودار شاخص بهای کالا و خدمات محور طول ها نشان دهنده و محور عرضها نشان دهنده..... است.

ب) شاخص بهای کالا و خدمات به واحد اندازه گیری بستگی

پ) به نظر میرسد افزایش شاخص بهای کالا و خدمات نشان دهنده شدن هزینه اقلام خوراکی و

ت) شاخص بهای کالا و خدمات بر اساس تعداد متغیر محاسبه می شود.

تمرین ۱۱: اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

تمرین ۱۲: آیا پرداخت یارانه ثابت طی سالهای آتی می تواند در همه این مدت در آمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟

تمرین ۱۳: هزینه های زندگی یک خانواده در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است.

کل	خوراکی و آشامیدنی	مسکن	پوشاک	نوع هزینه
۸۵۰	۲۱۰	۷۵۰	۳۰۰	هزینه در سال ۱۳۹۰

الف) هزینه پوشاک در آبان ۱۳۹۱



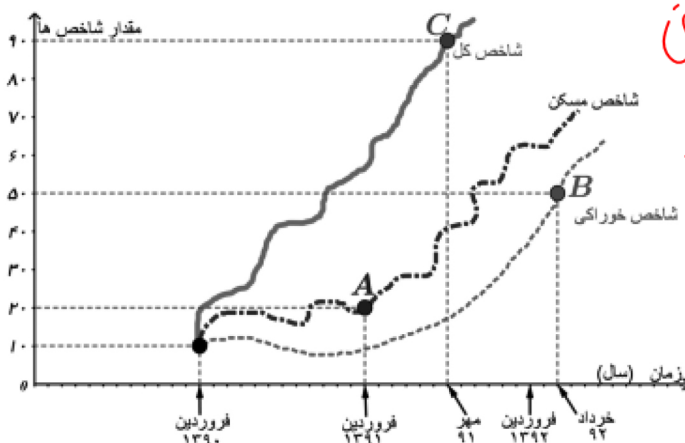
مثال: قیمت مرغ و گوشت در سال ۹۰ به ترتیب ۵۰۰۰ و ۸۰۰۰ و
میزان مصرف آن در آن سال به ترتیب ۵ و ۴ کیلوگرمی باشد
قیمت مرغ و گوشت در سال ۹۱ به ترتیب ۸۰۰۰ و ۹۰۰۰ و میزان مصرف آن
به ترتیب ۸ و ۱۱ کیلوگرمی باشد! سؤاها و در هر سؤا ضرایب
این لحاظ را به دست آورید.

(ب) هزینه مسکن در خرداد ۹۳

(پ) هزینه خوراکی و آشامیدنی در دی ماه ۱۳۹۵

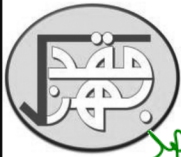
(ت) هزینه کل در فروردین ماه ۱۳۹۶

تمرین ۱۴: با توجه به نمودار شاخص بها و کالای روبه رو هزینه مسکن در فروردین ۹۱ و هم چنین هزینه خوراکی در خرداد ۹۲
چقدر است؟ (هزینه مسکن و هزینه خوراکی در سال پایه به ترتیب برابر ۲۰ و ۸ میلیون تومان می باشد.)



هزینه سال در سال پایه ۹۰ برابر ۸۰۰ هزار تومانی
و در سال ۱۴۰۰ برابر ۱۲۰۰ هزار تومانی بود.
تفاوت در هر دو کدام را می پسندیم؟

$$\text{تغییر} = \frac{1200 - 800}{800} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2} \times 100 = 50\%$$



$$\text{تورم} = \frac{\text{قیمت کالا در سال جدید} - \text{قیمت کالا در سال قدیم}}{\text{قیمت کالا در سال قدیم}} \times 100$$

$$= \frac{1616 - 1400}{1400} \times 100 = \frac{216}{1400} \times 100 = 15.4\%$$

اگر شاخص بهای خرید فرض در سال ۹۵ برابر ۳۵۰ و در سال ۹۶ برابر ۳۰۰ باشد تورم تقریباً چند درصد است؟

$$15 = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{350 - 300}{300} \times 100 = \frac{50}{300} \times 100 = \frac{100}{6} = 16.6\%$$

تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را تورم می نامند. $P_1 - P_0$ تورم

P_0 : شاخص بهای کالا و خدمات سال پایه
 P_1 : شاخص بهای کالا و خدمات سال مورد نظر

معمولاً شاخص بهای یک کالا یا خدمت در سال پایه را برابر عدد ۱۰۰ می گیرند.



مثال: محاسبه تورم برای تمرین ۷

$$\text{تورم} = 140 / 5 - 100 = 40 / 5\%$$

زمانی شاخص بهای یک کالا یا خدمات در سال پایه ۱۰۰ نباشد: $\frac{P_1 - P_0}{P_0} \times 100$ تورم (درصد)



تمرین ۱۵: شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی به صورت فرضی در جدول مقابل داده شده است، نرخ تورم را در سال ۱۳۷۶ تا

۱۳۷۸ محاسبه نمایید (سال ۱۳۷۵ سال پایه در نظر بگیرید).

سال	شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی	تورم
۱۳۷۵	۱۰۰	
۱۳۷۶	۱۲۰	
۱۳۷۷	۱۵۰	
۱۳۷۸	۲۰۰	



ریاضی و آمار ۲

مثال: تعداد قیمت مرغ ۶۰ هزار است. سلفی قیمت مرغ در سال ۹۲ برابر ۹۲ است. سلفی قیمت مرغ در سال ۹۷ برابر ۹۷ است. سلفی قیمت مرغ در سال ۹۲ برابر ۹۲ است. سلفی قیمت مرغ در سال ۹۷ برابر ۹۷ است.

$$E = \frac{P_t - P_0}{P_0} \times 100 \rightarrow E = \frac{97 - 92}{92} \times 100 \rightarrow E = \frac{5}{92} \times 100 = 5.43\%$$

تمرین ۱۶: اگر سبد هزینه خانواری شهرنشین در سال پایه برای دو کالای مشخص در سال پایه به ترتیب ۱۷۵ و ۳۸۰۰۰ تومان بوده و هزینه آن دو کالا در سال مورد نظر به ۲۰۰ و ۵۴۰۰۰ تومان برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۳۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد:

$$40 = (x - 25) \times 4$$

$$40 = 4x - 100$$

الف) شاخص بهای این دو کالا را مشخص کنید.

$$40 + 100 = 4x \rightarrow 140 = 4x \rightarrow x = \frac{140}{4} = \frac{70}{2} = 35$$

ب) مقدار تورم موجود را تعیین کنید.

نرخ بیکاری

جمعیت بیکار

نرخ بیکاری: عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال.

جمعیت فعال

(تعداد شاغلین + تعداد بیکاران)

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{جمعیت فعال}} \times 100$$



جمعیت فعال: به مجموع جمعیت شاغل و بیکار گفته می شود.

جمعیت بیکار: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله ای که سه شرط زیر را توانان دارا باشد:

(۱) در هفته مرجع حتی یک ساعت هم کار نکرده باشد.

(۲) آمادگی برای انجام دادن کار داشته باشد.

(۳) در هفته مرجع و سه هفته قبل از آن، جویای کار بوده باشد.

جمعیت شاغل: فرد ۱۶ ساله یا بالاتر از ۱۶ ساله ای که در یک هفته مرجع بازه زمانی هفت روزه ای که وضع فعالیت افراد در آن در

نظر گرفته میشود حداقل یک ساعت کار کرده باشد.

تمرین ۱۷: در یک کشور، تعداد بیکاران ۳ میلیون نفر و تعداد شاغلین ۱۷ میلیون نفر است. شاخص نرخ بیکاری در این کشور

چند درصد است؟

بیکار	شاغل
۳	۱۷

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} = \frac{۳}{۲۰} \times ۱۰۰$$

$$\text{نرخ بیکاری} = ۱۵\%$$

$$\frac{۳۰}{۲۰} = ۱۵\%$$



در یک روستا تعداد بیکاران ۲۴ میلیون و شاغلین ۹۶ میلیون است.

ساختن نرخ بیکاری می‌دهد و است.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{بیکار}}{\text{فعال}} \times 100 = \frac{24}{120} \times 100 = \frac{24 \times 100}{120} = 20\%$$

بیکار ۲۴
شاغل ۹۶
فعال ۱۲۰

سوال مهم

الف) تعداد بیکاران را بدست آورید.
تقریباً ۱۸٪ در یک منطقه شاخص نرخ بیکاری ۴۰ درصد است. اگر جمعیت فعال این منطقه ۱۸۰ هزار نفر باشد.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{بیکار}}{\text{فعال}} \times 100 \Rightarrow 40 = \frac{x}{180} \times 100 \Rightarrow 40 = \frac{x \times 100}{180}$$

$$40 = \frac{x \times 100}{180} \Rightarrow \frac{40}{1} = \frac{100x}{180} \Rightarrow 40 \times 180 = 100x \Rightarrow x = \frac{40 \times 180}{100} = 72$$

فعال ۱۸۰
بیکار ۷۲
شاغل ۱۰۸

$$180 = 72 + x$$

ب) تعداد شاغلین چند نفر است؟

$$108 = x \Rightarrow 108$$

تمرین ۱۹: در سر شماری یک روستا کل جمعیت ۷۵۰ نفر و جمعیت افراد کمتر از ۱۶ سال ۲۲۰ نفر بوده است و ترکیب جمعیت

۱۶ بالای ساله و بالاتر این روستا (از نظر فعالیت) به صورت زیر بوده است:

جمع	سایر (نامید از پیدا شدن کار، بیمار و ...)	در حال تحصیل	خانه دار	بیکار	دارای درآمد بدون کار	شاغل	نوع جمعیت
۵۳۰	۵۰	۱۸۰	۱۰۰	۲۵	۲۵	۱۵۰	تعداد

الف) نرخ بیکاری را بدست آورید.

ب) در این روستا سال آینده یک کارگاه نجاری تأسیس می شود و ده نفر از جمعیت بیکار روستا جذب این کارگاه می شوند،

نرخ بیکاری چقدر کاهش می یابد؟



پ) اگر بخواهیم نرخ بیکاری به ۰۴/۰ کاهش پیدا کند چند نفر از بیکاران جدول باید مشغول به کار شوند؟

نمایه توده بدنی یا نماتوب (BMI)

وزن (برحسب کیلوگرم)

نماتوب =

نماتوب: این شاخص میزان اضافه وزن یا کمبود وزن را نشان می دهد.

مربع قد (برحسب متر)

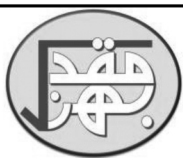
$\rightarrow \frac{\text{وزن}}{\text{قد}^2}$

$$BMI \Rightarrow \frac{72}{(1.7)^2} = \frac{72}{2.89} = 24.91 < 25$$

با استفاده از این، رابطه برای هر فرد نماتوب محاسبه می شود که به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه گیری می شود:

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow 19 < \text{نماتوب}$ (الف)

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow 25 < \text{نماتوب} \leq 29$ (ب)



شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow 30 < \text{نماتوب} \leq 25$ (پ)

شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow 30 \geq \text{نماتوب}$ (ت)

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول رو به رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می کنند.

گروه سنی	۱۹-۲۴	۲۵-۳۴	۳۵-۴۴	۴۵-۵۴	۵۵-۶۴	بالا تر از ۶۵
نماتوب مناسب	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

تمرین ۲۰: فردی ۳۸ ساله وزن ۹۰ کیلوگرم و قد ۱۷۰ سانتی متر دارد نماتوب این شخص را محاسبه کنید. آیا این شخص اضافه

وزن دارد؟

$$BMI = \frac{\text{وزن به kg}}{(\text{قد به متر})^2} = \frac{90}{(1.7)^2} = \frac{90}{2.89} = 31.14$$

بله

تمرین ۲۱: مقدار شاخص توده بدنی فردی برابر ۲۵ است اگر قد او ۱۸۹ سانتی متر باشد. وزن این شخص چند کیلوگرم است؟



شاخص پایه آموزش

فوانایی متن میزان سهولت درک متن از طریق انتقاب واژه های مناسب و رعایت دستور نگارش است.

یکی از شاخص های خوانایی که سالهای تحصیلی خواننده متون انگلیسی را تخمین میزند به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{شاخص پایه آموزش} = \left[\frac{\text{میانگین تعداد کلمات در جمله} + \text{درصد کلمات دشوار}}{4} \right] \times 100$$

این شاخص عددی بین ۱۲ تا ۱۸ است که نشان دهنده پایه تحصیلی است.

مثال: در یک متن، میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۸ کلمه و درصد کلمات دشوار در آن ۵/۲ است، شاخص پایه آموزش در این متن را حساب کنید.

$$\text{شاخص پایه آموزش} = \left[\frac{(2/5 + 8) \times 100}{4} \right] = \left[\frac{100 \times 8.4}{4} \right] = \left[\frac{840}{4} \right] = 210$$

تمرین ۲۲: برای کتابی که هر جمله آن به طور متوسط ۱۵ کلمه دارد و لغات دشوار هر جمله ۱۰ درصد است، پایه آموزش را بدست آورید.

$$\left[\frac{(15 + 10) \times 100}{4} \right] = \left[\frac{2500}{4} \right] = 625$$



تمرین ۲۳: اگر در کتابی شاخص پایه آموزش (۱۱) باشد و میانگین تعداد کلمات در هر جمله ۱۵ باشد، چند درصد کلمات دشوار

هستند؟

$$[(میانگین تعداد کلمات در هر جمله) \times (تعداد جملات)] = [(۱۵ + ۱) \times ۷۴] = ۱۱$$

$$11 = [(15 + 1) \times 74] \Rightarrow 11 = [74 \times 1 + 74] \Rightarrow 11 = [74] + [74] \Rightarrow 5 = [74 \times 1]$$

$$9 = \frac{5}{.6} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{5 \cdot 5}{3} = \frac{25}{3} = [12, 5] = (12) \%$$

تمرین ۲۴: در کتابی که برای دانش آموزان پایه نهم مناسب است ۱۶ درصد کلمات آن سخت و دشوار است. باید میانگین تعداد

کلمات در هر جمله آن چقدر باشد؟



درس ۲

سری های زمانه

نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب تر است؟

دمای هوای شهر محل زندگی مادر هفته آینده.

میزان آلاینده های شهر محل زندگی مادر ماه آینده.

نرخ یکاری در زمان اخذ دیپلم

آیا به نظر شما مجموعه ای از داده های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم جمع آوری شده باشند، می توانند پیش بینی خوبی برای

تصمیم گیری ما باشند؟



تمرین ۲۵: میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر ۱ و ۲ بر حسب میلی متر در جدول زیر آمده است:

الف) جدول را کامل کنید.

شهر ۱	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
	۱۵	۲۰	۳۵	۴۰	۳۵	۳۵			
شهر ۲	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰			

$$\bar{x} = \frac{۱۵+۲۰+۳۵+۴۰+۳۵+۳۵}{۶} = \frac{۱۸۰}{۶} = ۳۰$$

$$\sigma^2 = \frac{(۱۵-۳۰)^2 + (۲۰-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2 + (۴۰-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2 + (۳۵-۳۰)^2}{۶}$$

$$= \frac{۲۲۵+۱۰۰+۲۵+۱۰۰+۲۵+۲۵}{۶} = \frac{۵۰۰}{۶} \approx ۸۳/۳۳$$

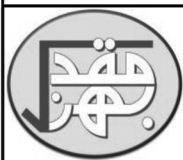
$$\sigma = \sqrt{۸۳/۳۳} \approx ۹/۱۲$$

$$\bar{x} = \frac{۲۳۰+۱۷۰+۱۵۰+۱۳۰+۱۱۰+۱۱۰}{۶} = \frac{۹۰۰}{۶} = ۱۵۰$$

$$\sigma^2 = \frac{(۲۳۰-۱۵۰)^2 + (۱۷۰-۱۵۰)^2 + (۱۵۰-۱۵۰)^2 + (۱۳۰-۱۵۰)^2 + (۱۱۰-۱۵۰)^2 + (۱۱۰-۱۵۰)^2}{۶}$$

$$= \frac{۶۴۰۰+۴۰۰+۰+۴۰۰+۱۶۰۰+۱۶۰۰}{۶} = \frac{۱۰۴۰۰}{۶} \approx ۱۷۳/۳۳ \quad \sigma = \sqrt{۱۷۳/۳۳} = ۴۱/۶۳$$

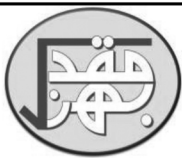
ب) میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.



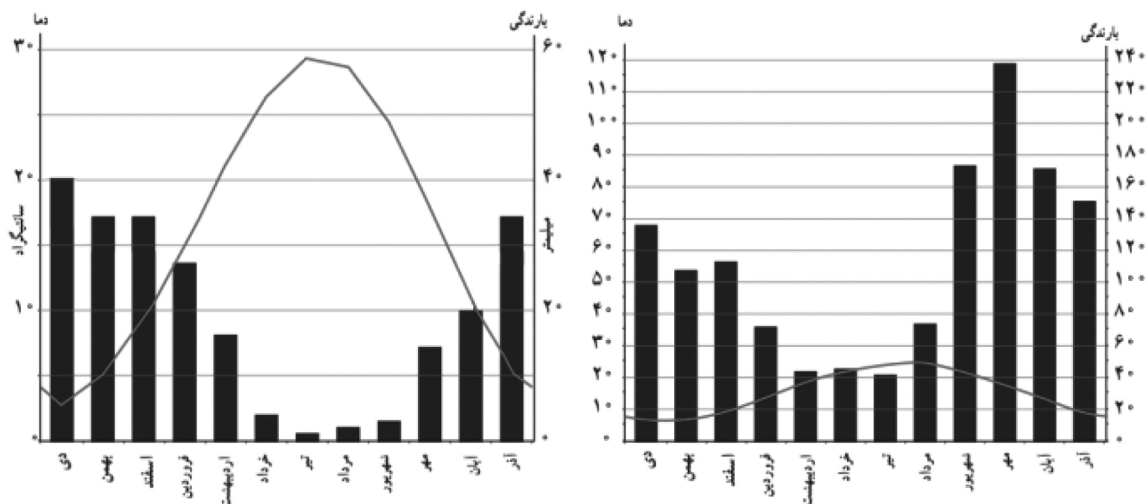
پ) نمودار پراکنش نگاشت هر دو شهر را بر حسب ماه های سال با یک مقیاس بر روی یک دستگاه مختصات رسم کنید. (نقاط را به هم وصل کنید)



حال نمودار پراکنش نگاشت دما و نمودار میله ای بارندگی های همان دو شهر را با مقیاس های متفاوت برای یک سال به ویژه در یک دستگاه مختصات رسم کرده ایم.



ریاضی و آمار ۲



(ت) در چه فصلی از سال بارندگی بیشتر است؟

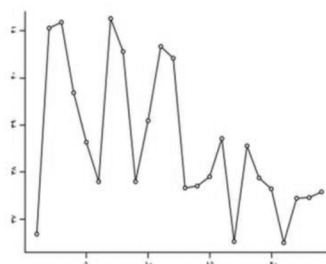
(ث) متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه های سال به همین نحو است؟

سری زمانی: مجموعه داده هایی در طی زمان با خواصل منظم گردآوری می شوند.

نمودار سری زمانی: پراکنش نگاشت سری زمانی که داده ها را با پاره خط هایی در طول زمان به هم متصل می کند.

تمرین ۲۶: سری زمانی روبرو نشان دهنده ۶ روز درجه حرارت بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده

درمانش با آنتی بیوتیک آغاز شده است.



(الف) هر روز چند درجه حرارت خوانده شده ثبت شده است؟



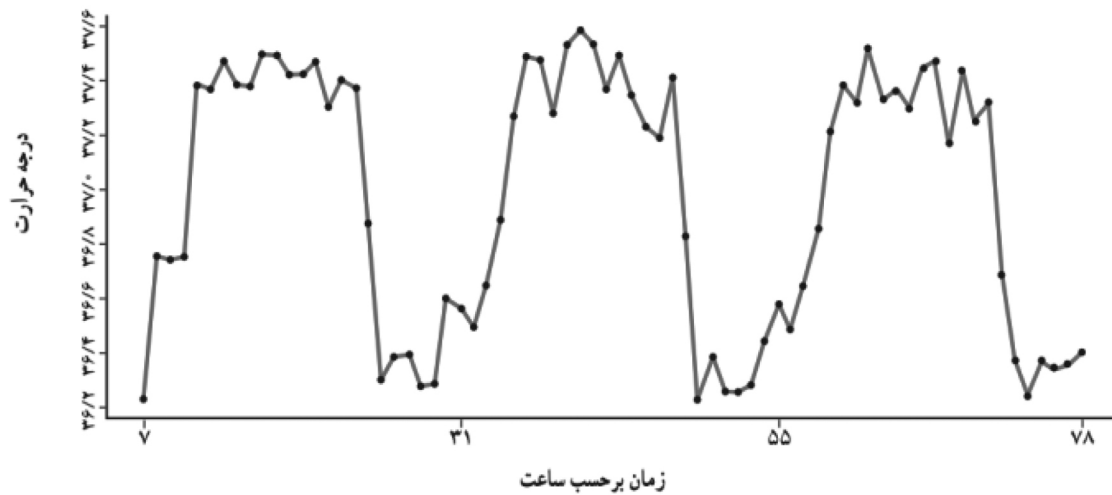
ب) درجه حرارت بیمار در لحظه بستری شدن چند درجه است؟

پ) پس از چند روز درجه حرارت بیمار به حالت طبیعی بازگشته است؟

ت) اگر اولین زمان ثبت درجه حرارت ساعت ۷ صبح، باشد نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده تر به نظر میرسد؟ کدام یک جزئیات بیشتری را نشان می دهد؟



تمرین ۲۷: درجه حرارت بدن یک انسان سالم هر ساعت طی ۳ روز از ۷ صبح اندازه گیری شده است.



الف) بیشترین دمای بدن چقدر است؟

ب) با دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.

پ) آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟

ت) این منحنی چه ویژگی دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)



تکرار یک ویژگی را در سری سری زمانی الگو می نامند. از طریق این الگوها میتوانیم



اتفاقات و پدیده هایی را که در آینده رخ می دهد پیش بینی کنیم و یا وضعیت آن پدیده را در

گذشته هم بررسی کنیم.

در بعضی نمودارهای سری های زمانی یک شکل مرتب تکرار میشود. در این حالت سری



زمانی را متناوب می گویند.

تمرین ۲۸: کدام یک از داده های زیر سری زمانی است؟

الف) تعداد مراجعین یک عابر بانک مشخص در هر روز فروردین ۹۷

ب) قیمت سهام یک شرکت در روز اول هر ماه سال ۹۶

پ) زمان های رخ دادن تصادفات قطارها.

ت) میزان فروش یک مغازه در تمام هفته های زمستان یک سال



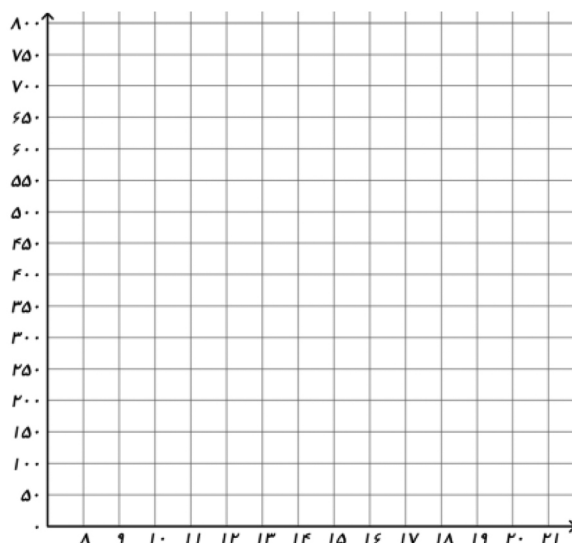
فصل ۳

درون یاب و برون یاب

تمرین ۲۵: در یک مرکز خرید تعداد مشتری های بین ساعت ۹ و ۲۱ به صورت زیر ثبت شده است.

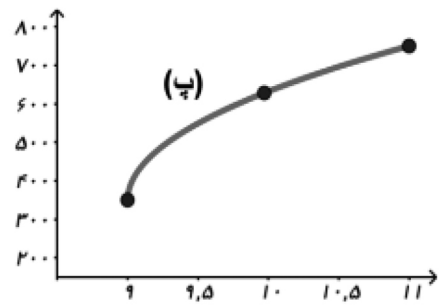
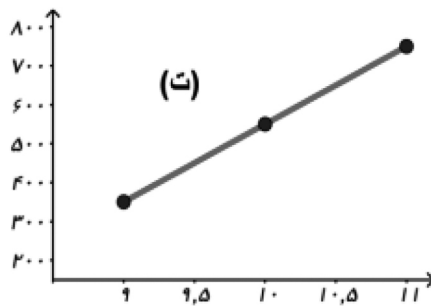
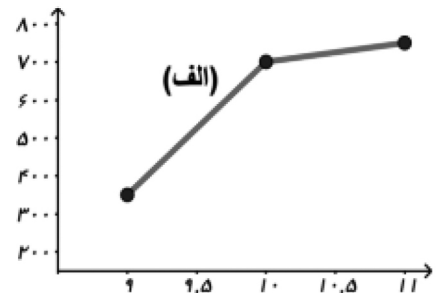
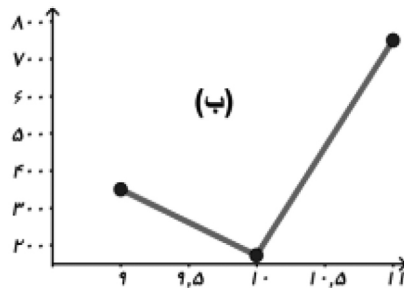
ساعت (T)	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
تعداد مشتری (N)	۳۵۰	۷۵۰	۸۰۰	۶۵۰	۳۰۰	۵۰۰	۲۵۰

الف) نمودار سری زمانی جدول بالا را رسم کنید.





ب) می خواهیم تعداد مشتری های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم، به نظر شما کدام یک از نمودارهای زیر واقعی تر است؟



درون یابی: تفمین داده های داده های ثبت شده است.

درون یابی که به وسیله پاره خط انجام شود، درون یابی خطی است.

خط: برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه از درون یابی آن

$$y = m(x - x_A) + y_A$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



تمرین ۲۶: می خواهیم تعداد مشتریهای ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون یابی کنیم فرض می کنیم تعداد مشتری ها در فاصله زمانی ۹ تا ۱۱ به صورت یکنواخت تغییر کرده است.

الف) معادله خط دو ساعت (۹،۳۵۰) و (۱۱،۷۵۰) را به دست آورید.

$$m = \frac{750 - 350}{11 - 9} = \frac{400}{2} = 200$$

$$y = 200(x - 9) + 350 \Rightarrow y = 200x - 1800 + 350 \Rightarrow y = 200x - 1450$$

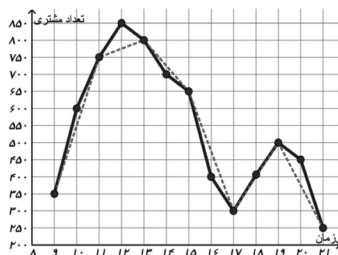
ب) مقدار این خط در ساعت ۱۰ چقدر است؟

$$y = 200(10) - 1450 = 2000 - 1450 = 550$$

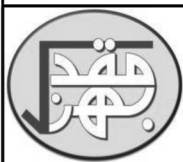
پ) این مقدار به درون یابی کدام یک از شکلهای فعالیت قبل نزدیک تر است؟

ت) اگر مقادیر داده های واقعی را به صورت ساعتی جمع آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است.

خطای درون یابی ساعت ۱۰ چقدر است؟



$$E = |550 - 600| = |-50| = 50$$



ث) خطای درون یا بی ساعت ۱۶ چقدر است؟

تمرین ۲۷: فرض کنید مقادیر تابع f از به به صورت جدول زیر باشد مقدار تابع را در $x = 7$ ، با استفاده از درون یابی خطی تقریب بزنید.

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
$f(x)$	۱۱	۱۲	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹	۱۸

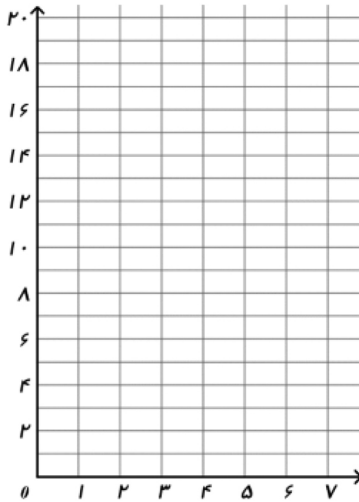
برون یابی: تفمین داده‌های بعد یا قبل از داده های ثبت شده است.

تمرین ۲۸: میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

سال x	۱	۲	۳	۴	۵
فروش y	۶	۹	۱۱	۱۵	۱۹



الف) نمودار سری زمانی جدول بالا را رسم کنید.

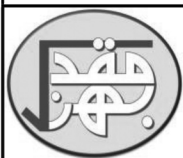


ب) فروش در سال هفتم را حدس بزنید.

پ) میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی محور نشان دهید.

ت) یک خط از نقطه میانگین ها به نقطه (۵، ۱۹) وصل کنید.

ث) معادله خط را به دست آورید.



ج) اگر به جای x تا در معادله، مقدار ۶ قرار دهید عدد به دست آمده چقدر است؟ آیا میتوان این مقدار را به عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟

تمرین ۲۹: فرض کنید مقادیر تابع f به صورت جدول زیر باشد مقدار تابع را در $x = 17$ ، با استفاده از تابع برون تمرین یابی خطی تقریب بزنید.

تمرین ۳۰: فرض کنید جمعیت کشور در سالهای مختلف به صورت جدول زیر باشد:

سال	۱۳۳۵	۱۳۴۵	۱۳۵۵	۱۳۶۵	۱۳۷۰	۱۳۷۵	۱۳۸۵	۱۳۹۵
جمعیت	۳۲ میلیون	۴۰ میلیون	۴۸ میلیون	۵۲ میلیون	؟	۶۵ میلیون	۷۰ میلیون	؟

الف) جمعیت کشور را در سال ۱۳۷۰ تخمین بزنید؟ (درون یابی)

ب) جمعیت کشور را در سال ۱۳۹۵ تخمین بزنید؟ (برون یابی)

قیمت: ۷۵۰۰۰ تومان